Matematikai Lapok

2008/1

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 14. évfolyam (2008), 1. szám

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A Matematikai Lapok megjelenését támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

MEGEMLÉKEZÉS ERŐD JÁNOSRÓL

RÉVÉSZ SZILÁRD

Néhány éve a klasszikus Bernstein-egyenlőtlenség Turán-típusú megfordításainak tanulmányozása, kutatása hirtelen lendületet vett. Én először 2003-ban Norman Levenberg amerikai matematikustól hallottam egy, Jevgenyij Poletskyvel közös új eredményéről, kaptam meg és olvastam el a cikküket is. Ettől teljesen függetlenül, fél évre rá Szabados József kollégám és Erdélyi Tamás Amerikában élő magyar matematikus kezdtek ilyen témájú kutatásokba: 2004 elején a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben hallgathattam meg előadásaikat. Ha valamiről sokszor hall az ember, akkor maga is elkezd rajta gondolkozni: így aztán én is foglakozni kezdtem a témával. Amikor aztán a cikkeinket [6, 7, 8] megfogalmaztuk és leírtuk, az irodalom pontosabb megadása, idézése kapcsán olvastuk el Erőd János 1939-es, magyar nyelvű cikkét [1]. Ez valóban megdöbbentő tapasztalattal járt: abban a régi munkában már megvolt több XXI. századi eredményünk, sőt a továbbiak alapgondolata, módszerei is ki voltak jelölve már valamilyen formában. (Többet a konkrét matematikai eredményekről, a cikk tartalmáról és mai feldolgozásáról lásd a [7] munkában.)

De hát miért nem folytatta? Miért nem hallottunk további Erőd János eredményekről? Azt könnyű volt kideríteni, hogy több matematikai közleményt sem előtte, sem utána nem jelentetett meg. Ezt több mint különösnek találtam. Miközben lassan feldolgoztuk cikkei tartalmát, visszavontuk a publikálástól a már lefedett eredményeket, és megfelelő formára hoztuk, ami tényleg új volt, nem hagyott nyugodni a kérdés: ki lehetett ez a szerző, aki ennyivel megelőzött minket? Vajon miért, hogy a korabeli referáló folyóiratok – Zentralblatt, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik – jelzései ellenére a jelen kutatói között csak eredményeinek egy (szerintem kisebb) része, a valós intervallumon vett Markov-konstansra vonatkozó eredményei maradtak közismertek? Cikkét többen idézték, sokszor magyarul nem tudó szerzők is, akik az idézést nyilván átvették – de mindenütt csak az intervallum esetére utaltak. Először ezért nem vettem észre én sem a cikk további tartalmát, holott már Levenbergék cikkének elolvasása után beszereztem egy fénymásolatot róla.

Mindenkitől kérdezgettem, érdeklődtem. Többeknek rémlett a név, de semmi közelebbit nem tudott senki. Surányi János professzor úr először el sem akarta mondani nekem homályos emlékeit Erőd János sorsával kapcsolatban, de unszolásomra mégiscsak megosztotta azokat velem. „Két ellentmondó emlék is felötlik bennem, nem tudom, igaz-e valamelyik is. Az egyik szerint úgy rémlik, hogy a háború idején, talán munkaszolgálatosként, vagy a holokausztban veszett el. A másik emlékkép szerint egyházi vonalra lépett, és úgy tűnt el." Mint később kiderült, ezek az emlékek nem ellentmondóak, s mindegyik lényegében igaz.

Végül Dr. Gergely Tamás barátom talált az interneten egy szócikket a Veszprém Megyei Életrajzi Lexikon nevű kiadványból, majd a „Hetek" c. folyóiratból: így leltünk nyomára Erőd János emlékének. Sikerült a telefonkönyv segítségével megtalálnom azt a dr. Bán Ervint is, aki Erőd János hűséges barátjaként több megemlékező cikk szerzője is volt. Vele telefonon tudtam még beszélni, de a személyes találkozás lehetőségét már elhárította: akkor már nagyon beteg volt. Nem sokkal később meg is halt. Megkértem Dr. Szombathy Gyula nyugalmazott református lelkész urat, hogy a református egyház berkeiben nézzen utána Erőd János emlékének: ő nem sokkal később valóban sok értékes dokumentummal és ismerettel szolgált [24]. Megtalálta Erőd János egyetlen életben maradt családtagját, Karmen nevű nővérét is, akivel Gyöngyösön beszélt. De fényképet még a nővér sem tudott adni: az egyetlen (pontosabban: kettő) fényképet, ami Erőd Jánosról ismert, a méltán legendás KöMaL [4] (Középiskolai Matematikai Lapok, IX. évf. 1933. május–június, VII. oldal és X. évf. 1934. május–június, VIII. oldal) őrizte meg, az éves pontversenyben a legeredményesebbnek bizonyult feladatmegoldók tablóin. Ez a két kicsi, rossz minőségű, középiskolás diákkori kép vetíti elénk ennek a tragikus sorsú fiatalembernek az arcvonásait.

Erőd János Gyöngyösön született 1916. november 30-án. Édesapja zsidó származású ügyvéd volt, aki családjával az 1920-as években áttért a református vallásra. Az apa nem magyarosította a nevét, később is „Ehrlich" családnéven szerepelt. A helyi református egyházközösségben viszont presbiteri tisztet is betöltött. A család minden tagja – felesége és három gyermeke is – a gyülekezet aktív tagja volt. Bottyán János lapszerkesztő-lelkész szerint [9] Márta lányuk – ő volt a legfiatalabb – „ötletes levelezője volt" a Református Jövő c. egyházi folyóiratnak. De nem csak ebben követte bátyja példáját: a KöMaL 1937–38-as évfolyamának legjobb matematika feladatmegoldói között is szerepel a fényképe az éves tablóban [4].

A szülőket és Márta lányukat 1944-ben elhurcolták Gyöngyösről Auschwitzba, ahonnan nem tértek vissza. A legidősebb lányuk – Karmen, Vécsey Árpádné – Budapestre került, így életben maradt, a háború után visszatért Gyöngyösre, és ma is ott él. Szombathy Gyula 2006-ban gyöngyösi lakásán fel is kereste az akkor

94-dik évében járó hölgyet, és tudott vele beszélni a családjáról, János testvéréről. Ő is említette, hogy János rendkívül széleskörűen művelt volt, a tudomány vonalán minden érdekelte. Bár matematikából doktorált, de otthonosan mozgott a magyar- és világirodalomban, a filozófiában. Ismerte a nagy gondolkodók műveit. Felsőfokon beszélt németül és franciául. A másik vonás, ami rá jellemző volt, a családszeretet.

A gyöngyösi egyházi anyakönyvi bejegyzés szerint János 1930-ban konfirmált, akkor még Ehrlich néven. Alap- és középiskoláit Gyöngyösön végezte: a Koháry István Reálgimnáziumban érettségizett. A gimnázium felsőbb évfolyamain már kiemelkedett matematikából. A KöMaL országos, éves pontversenyének feladatmegoldói között nem csak a matematika, de a fizika és az (akkor külön rovatban kezelt) ábrázoló geometria sikeres feladatmegoldói között is sokszor találkozni a nevével. Ennek a szorgalmas munkának köszönhetjük, hogy a fényképei – akkor már Erőd János néven – 1932–33-ban és 1933–1934-ben is megjelentek a KöMaL sikeres feladatmegoldóinak éves tablóin [4].

Színjeles érettségi után a bölcsészkarra iratkozott be. Egyetemi tanulmányairól jóformán semmit nem tudunk. Vajon hogyan találkozott az akkor magántanításból élő Turán Pállal? Turán Pál akkor még fiatal, de már termékeny kutató volt, aki együtt dolgozott kora tehetséges generációjának számos tagjával is. Ő kezdte vizsgálni azt a természetes, mondhatni alapvető kérdést, hogy vajon milyen alsó becslés adható egy polinom oszcillációjára, azaz deriváltjának maximum normájára, ha feltesszük, hogy az illető polinom maximum normája az egység intervallumon, avagy az egységkörben 1, és összes gyökei is ugyanabban a halmazban helyezkednek el? Turán Pál németül írott cikkét a Compositio Mathematica 1939-es évfolyama közölte [5] – de Erőd János már ebben az évben folytatta ezeket a vizsgálatokat, és az ő magyar nyelvű cikke is 1939-ben jelent meg, a Matematikai Lapokban [1]. Miért magyarul? Talán mert a doktori értekezése is ez a tartalmas cikk volt, és így technikailag egyszerűbb lehetett: az Egyetemi Könyvtárban őrzött doktori disszertáció tulajdonképpen nem más, mint a cikk egy különlenyomata, borítóján a doktori értekezés feliratával. Turán és Erőd kölcsönösen hivatkozzák egymást, nyilvánvalóan már munka közben is kapcsolatban állottak. Talán megfogalmazható a felvetés, hogy Turán Pált Erőd János (informális, de tartalmilag annál inkább valós) doktori témavezetőjének, Erődöt pedig Turán tanítványának tekinthetjük.

Mégis, az értekezés illetve cikk semmit nem árul el a közöttük fennálló személyes kapcsolatról. Veszélyes volt? Mindenesetre első olvasatra a száraz idézések alapján Erőd János számára Turán akár egy soha nem látott, pusztán cikkeinek olvastán ismert szerző is lehetett volna. Nem tudom, formálisan kellett-e témavezető a doktori értekezéshez, és ha igen, akkor ki lehetett Erőd János hivatalos témavezetője. Talán egyszer előkerül valamilyen jegyzőkönyv, vagy egyéb irat a doktori eljárásáról, és jobban megismerjük ennek a nagyon szűkszavú, visszafogott idézésnek a hátterét is. Ma csak annyit tudunk biztosan, hogy ezzel az igen tartalmas, 28 oldalas dolgozattal Erőd János már 23 évesen matematikai doktorátust szerzett a Budapesti Pázmány Péter Tudományegyetem bölcsészkarán. Bottyán János szerint [9] eddig ő volt az egyetlen református lelkipásztor, aki matematikából doktorált.

Zsidó származása miatt azonban Erőd János mégsem számíthatott tanári kinevezésre, bár Bán Ervin megjegyzi [12, 13, 14], hogy később Pápán az egyházi gimnáziumban alkalmilag taníthatott is, amikor valamelyik gimnáziumi matematikatanárt behívták katonának – háború volt! Bán Ervin még azt is megemlíti, hogy diákjai „bunernek" nevezgették ... [12]. Bottyán János [9] írja, hogy amikor Erőd János 23 évesen doktorált matematikából, az egyik német egyetemre tanársegédnek hívták meg azzal, hogy „árjának" nyilvánítják, ha elfogadja az állást: ő azonban visszautasította ezt az ajánlatot. Jó volna pontosabbat tudni erről az esetről is! Mindenesetre az immár doktor Erőd János az adott körülmények között más pályát választott.

Esze Tamás akkori gyöngyösi református lelkész biztatására jelentkezett a Pápai Református Teológiára, ahová fel is vették [9, 12]. Bölcsészkari tanulmányait beszámították a teológián is, így 1939–1942 között végezhette el gyorsított formában a négyéves teológiát. Ezután 1943-ban letette az I., majd 1944-ben a II. lelkészképesítő vizsgáját, jeles eredménnyel. Így Dr. Erőd János a református egyház lelkésze lett.

Bottyán János azt írja [9], Erőd János kezdetben nem érzett különösebb hivatást a lelkészi pályára, inkább tanári elhivatottsága vezette, pedagógiai céljait próbálta így elérni. De később érdekelni kezdte a teológia is, és például Bán Ervinnel folytatott levelezésében [17] már lelkészre valló érveket fejteget. Bizonyos, hogy mélyen hívő keresztény ember volt, aki leveleiben, gondolkodásában, erkölcsi felfogásában korának kegyetlen valóságát, de az egész kultúrát és minden eszmét is Jézus Krisztushoz és az evangéliumhoz mért.

A Pápai Református Teológián 1941 őszén egy fél évig volt hallgatótársa [22] a nála jó néhány évvel fiatalabb Bán Ervin, aki talán hasonló módon kereste a helyét: de aztán útjaik elváltak, mivel Bán Ervin felvételt nyert az egyetemre, és a tanári pályát választotta. Barátságuk azonban megmaradt, és tovább leveleztek egymással. Erőd János nagyon őszintén fogalmazta meg neki gondolatait, és szinte bátyjaként viselte gondját, látta el tanácsaival, vitatkozott vele és korholta is [17]. Bán Ervintől maradt ránk Erőd János egyetlen ismert levele is [17] – de ez az egyetlen levél sokat elmond személyiségéről, gondolkodásáról. Bán Ervin később emlékének hűséges ápolója lett, írásaiban megörökítve barátja alakját az utókor számára is.

Pápán teológushallgató-társai általában szerették és tisztelték tudása és szerénysége miatt. Egyik évfolyamtársa – Pongrácz Magda – alacsony, sovány fiúként emlékezett a „Doktorra", akit nyilván matematikai doktorátusa alapján hívtak így társai [9]. Néhány teológus kollegája azonban zsidó származása miatt tüntetett ellene. Bán Ervin erről azt írta, hogy tanulmányai befejezése előtt személyes ellentétek miatt távoznia kellett a főiskoláról [13]. Bottyán János pontosabb részletekkel is szolgál [9]: leírja, hogy professzorai azt ajánlották Erőd Jánosnak, hogy egy rövid időre hagyja el Pápát, amíg a kedélyek lecsillapodnak. Ekkor tanulmányaiból már csak a lelkészi vizsga volt hátra, amit néhány hónap múlva, 1943 februárjában le is tehetett Pápán [9]. Szombathy [24] kiemeli, hogy ezek szerint ez korántsem valami fegyelmi ügy volt, hanem jó tanács a professzorok részéről: 1942-t írtunk, s a professzorok jobbnak láthatták kedves tanítványukat kivonni a gyűlölködés fókuszából. Erről az időről írja Bán Ervin, hogy „Rövid ideig tartó gazdátlan állapot után falusi segédlelkész, majd a Komáromi Református Fiúárvaház igazgatója lett" [14]. Mindenesetre megfigyelhető a sorsa további alakulásán, hogy soha nem veszítette el a kapcsolatát egyházával, és a református egyház valamilyen módon mindig magáénak tekintette, gondoskodott róla, adott számára feladatot és állást. 1944. szeptember 20-án tette le Pápán az egyéves gyakorlatot feltételező második lelkészképesítő vizsgáját.

Pápán Erőd János nem internátusban lakott, hanem egy Nemes nevű egyszerű családnál. Itt János beleszeretett a református Nemes család Jolánka nevű lányába, s a lány is – Pongrácz Magda szerint fanatikusan [9] – szerette Erőd Jánost. Szerelmükön évfolyamtársai közül is sokan csodálkoztak, mert Jolánka ugyan melegszívű, hívő lány volt, de csak négy polgári osztályt végzett. Később Jolánka menyasszonya lett a tudós Erőd Jánosnak. Az akkori zsidótörvény azonban nem engedélyezte a házasságukat. Jolánka erre úgy döntött, hogy áttér a zsidó vallásra, hogy egybekelhessenek, s majd alkalmas időben visszatér a református vallásra. A helyi református gyülekezet akkori lelkésze – Olé Sándor – ezt a döntést megértéssel fogadta, sőt ehhez a maga segítségét is megígérte. De közben életbe lépett a faji törvény, amely megtiltotta a keresztyéneknek zsidó vallásra való áttérését is [9].

1944-ben János szüleit és Márta húgát deportálták Auschwitzba. János a „Jó Pásztor Misszió" zsidókat mentő segélyszervezet önkéntes munkatársaként maga is igyekezett menteni az üldözötteket. Szerettein azonban nem tudott segíteni.

Nemesék udvarában lakott egy nyilas fiatalember is, aki Jolánkát Németországba akarta vinni, mert – szerinte – aki itthon marad, az hazaáruló. (Szombathy megjegyzi [24]: Nehéz azt kideríteni, vajon ő is szerelmes volt-e Jolánkába? Bottyán János Pongrácz Mártát, Erőd János volt évfolyamtárását, a letartóztatás körüli napok tanúját idézve cáfolja ezt a feltevést [9] ...) Amikor Erőd János 1945 elején visszatért Pápára, Pongrácz Magda rosszat sejtve mondta neki: „János, maga itt van a legrosszabb helyen, itt mindenki ismeri!" [9]. De János azt felelte, hát hová menjen, hiszen Gyöngyösön még jobban ismerik... [9]. A fiatalok nem sokáig maradhattak észrevétlenek: feljelentették őket, és a nyilasok mindkettőjüket letartóztatták. Azt a vádat hozták fel Erőd János ellen, hogy rádión keresztül kapcsolatot teremtett a közelgő szovjet hadsereggel. A Nemes családnál tartott házkutatáskor sem rádiót, sem egyéb terhelő dokumentumot nem találtak: a vád minden bizonnyal teljesen alaptalan volt. Dr. Trócsányi Dezső teológiatanárt beidézték a laktanyába, hogy igazolja Erőd János személyazonosságát. Borzalmas állapotban találta a „vádlottat", akinek arcán cafatokban lógott a véres hús. A teológiaprofesszor tiltakozott az embertelen bánásmód ellen, azonban mindez hiábavaló volt. Jánost 1945 februárjában menyasszonyával együtt kivégezték, minden bizonnyal a pápai laktanyában. Sírjuk ismeretlen, de Kövy Zsolt nyugalmazott kollégiumigazgató úr megtalálta a Pápa városi halotti anyakönyvben azt az 1956-ban tett bejegyzést, mely az addig minden bizonnyal csak eltűntnek tekintett Nemes Jolánka 1945. február 15-i halálát dokumentálja.

Bán Ervin így jellemezte személyiségét [13]: „Különös nézetei voltak. A háborúról azt mondta: Így lesz két pogány hatalom viaskodásából keresztes hadjárat" [17]. „A keresztény rend, kultúra, társadalom, tudomány csupa üres szólam, mind a világi emberek találmánya. Krisztushoz, az evangéliumhoz ennek a kereszténységnek semmi köze" [17]. „Vallásossága sajátságos aszkézis volt. Kálvinista, de mégis más ... Kapcsolattartásában nem mennydörgött ... Okos és civilizált volt. A kultúra nagy személyeit és írásait rendre ismerte. Halálának igazi oka: az a világ (és társadalom) egy ilyen embert nem tudott elviselni" [12, 13].

Bán Ervin azt is írta: „Úgy hírlik, egyháza őrzi emlékét" [12]. Ezzel szemben Kövy Zsolt azt írta: „Megérdemelné, ha az Egyház, a Kollégium, a Teológia, Pápa városa hűségesebben őrizné emlékét" [10]. Ezért Kövy Zsolt kezdeményezte azt is, hogy helyezzenek el egy emléktáblát a Református Gimnázium és Kollégium falán ennek a fiatal korban mártírként elhunyt nagy tudású embernek az emlékére.

Kövy Zsolt azt írja róla: „teológiai felfogásában az élő Krisztus-hit volt a domináns. A letűnt, megrögzött nézeteket kritizálta. Ígéretes jövőt építhetett volna tehetségével, szerénységével, következetes igazságra való törekvésével" [16].

Bán Ervin is gondolatban folytatja életútját, amikor azt írja róla [13]: „Nagyon művelt ember volt, mondhatni: tudós. Matematikus létére magyar szakosokat megszégyenítő alapossággal ismerte az irodalmat, kitűnően a filozófiát. Tudott franciául, németül. (De magyarul is!) Ha életben marad, egyházának vagy az oktatásügynek vagy a tudományosságnak jelessége lett volna" [13].

De a „mi lehetett volna belőle" nagyon is érthető emberi kérdése mindig történelmietlen. Szombathy Gyula jegyzi meg zárójelben [24], hogy a Pápai Református Teológia 1941/42-es évkönyvének IV. évfolyamánál két név került egymás mellé: Dr. Erőd János mellett van az a Gulyás Lajos is, akit 1957-ben végeztek ki, s halt meg ugyancsak ártatlanul az 1956-os forradalom utáni elvakult megtorlás egyik áldozataként. Vajon ha nem éri őt el a nyilasok esztelen vérengzése szinte az utolsó napokban, akkor tehetsége szerint élhette volna-e le a további életét? Minden vérengzés, minden gyűlölet esztelen és irracionális: lényegében kiszámíthatatlan, hogy borzalmas XX. századi történelmünk soron következő őrületei között vajon hogyan alakult volna a személyes sorsa. Ő maga nem kergetett illúziókat a várható változásokkal kapcsolatban sem, fiatal kora és üldözött helyzete ellenére nagyon is reálisan szemlélte a jövőt [14]. De kétségtelenül megvolt benne mindaz a lehetőség, amit emlékének ápolói felvetnek: mindhárom területen további emlékezetes alkotás várhatott volna reá.

Sajnos a tanár Bán Ervin és a fent is idézett több egyházi szerző mellett pont mi, matematikusok eddig mintha nem foglalkoztunk volna az emlékével. Alapos keresés után sem találtam semmilyen nyomát rá vonatkozó megemlékezésnek a matematikus szakmán belül. Annál meglepőbb mindez, mert cikkét, ha tartalmának részbeni feledésbe merülése mellett is, de azért többször idézték – én 24 idézést találtam [3] –, tehát mindmáig „jegyzett szerző" maradt. Munkája belső, szakmai értékeinek köszönhető, hogy az East Journal on Approximations archív szekciójában 2006 októberében [2] megjelent eddig csak magyarul olvasható munkájának teljes angol fordítása is. A rá hivatkozó munkák száma pedig egyre emelkedik, témája szinte mintha újra éledne. Lehet, hogy csak most kezdjük igazán megérteni. Tudományos vonatkozásban tehát immár teljes bizonyossággal elmondhatjuk: gondolatai, munkája túlélte a pusztítást, és – a mi minden igyekezetünknél is jobban – megörökíti emlékét.

Irodalom

Matematikai szakmai cikkek, dokumentumok

[1] Erőd János: Bizonyos polinomok maximumának alsó korlátjáról, *Mat. Fiz. Lapok,* **46** (1939), 58–82, (magyarul); referálva Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik JFM 65.0324.02 (Dr. Lipka S., Szeged), Zentralblatt für Mathematik, Zbl 0021.39505 (T. Popoviciu, Cernăuţi).

[2] Erőd, János: On the lower bound of the maximum of certain polynomials, *East. J. Approx.*, **12** no. 4 (October 2006), 477–499 – Archives section (az [1] cikk teljes angol fordítása; fordították Farkas Bálint és Erő Zsuzsa).

[3] List of citations of the paper of J. Erőd [1], *East. J. Approx.*, **12** no. 4 (October 2006), 500–501, Archives section (Összeállította Révész Szilárd Gy.).

[4] *Középiskolai Matematikai Lapok,* VIII., IX., X., XIV. évfolyam (1931–32, 1932–33, 1933–34, 1937–38).

[5] P. Turán, Über die Ableitung von Polynomen, *Compositio Math.*, **7** (1939), 89–95.

[6] Szilárd Gy. Révész, Turán type reverse Markov inequalities for compact convex sets, *J. Approx. Theory,* **141** (2006), 162–173.

[7] Szilárd Gy. Révész, On a paper of Erőd and Turán-Markov inequalities for non-flat convex domains, *East. J. Approx.*, **12** no. 4 (October 2006), 451–467.

[8] Tamás Erdélyi, Inequalities for exponential sums via interpolation and Turán type reverse Markov inequalities, in: *Frontiers in Interpolatin and Approximation (in memory of Ambikeshwar Sharma),* N. K. Govil, H. N. Mhaskar, R. N. Mohapatra, Z. Nashed, J. Szabados, eds., Taylor and Francis Books, Boca Raton, Florida (2006), pp. 119–144.

Megemlékezések, cikkek

[9] Bottyán János: Emléküket őrizzük kegyelettel, *Református Egyház,* 1964. XVI. évf. 7. szám 160–161. lap.

[10] Kövy Zsolt: A mártír visszakérdez (Erőd J. emlékezete), *Reformátusok Lapja,* 2001. V.

[11] Kövy Zsolt: Ültessünk virágot, *Reformátusok Lapja,* 1986. III. 9.

[12] Bán Ervin: Egy vértanú pedagógus emlékére, *Pedagógusok Lapja,* 51. évf., 2–3. szám, 1995. febr. 8.

[13] Bán Ervin: Református vértanú Pápán, *Hetek,* 2000. I. 26.

[14] Bán Ervin: Egy tanár emlékezete, *Köznevelés,* 61. évf., 5. szám, 2005. febr. 4.

[15] *Veszprémi Megyei Életrajzi Lexikon,* főszerk.: Varga Béla, Veszprém, 1998, `http://www.mek.iif.hu/porta/szint/egyeb/lexikon/veszplex/html`.

[16] Kövy Zsolt: Akikért a harang szól", *Theológiai Szemle,* 2005/3., 177–178.

Levelezés

[17] Erőd János levél (másolat) – Bán Ervinnek írta dátum nélkül, *(Dr. Bán Ervintől Dr. Kövy Zsolt, tőle Dr. Szombathy Gyula, s tőle Révész Szilárd kapott másolatot).*

[18] Bán Ervin Kövy Zsolthoz írott levelezőlapja (másolat), 2002. VIII. 28.

[19] Kövy Zsolt Bán Ervinhez írott levelei (másolat), 2005. III. 23. és 2001. I. 5.

[20] Kövy Zsolt Szombathy Gyulához írott levelei, 2005. IX. 14., 2005. X. 3. és 2005. X. 25. dátummal.

Irattári, levéltári dokumentumok

[21] Erőd János teológiai iskolai bizonyítványai (másolat, Hudi József levéltárvezető, Pápa. 2005. IV. 20.)

[22] A Dunántúli Református Egyházkerület Pápai Főiskolájának Évkönyvei, 1939–40., 1940–41., 1941–42. tanév.

[23] A Gyöngyösi Református Egyházközség anyakönyvei.

Kéziratban

[24] Dr. Szombathy Gyula, *Dr. Erőd János matematikus – református lelkész mártírhalálának története,* kézirat, Budapest, 2006.

NÉHÁNY KOMBINATORIKUS PROBLÉMÁRÓL V. RÉSZ: HASONLÓ RÉSZHALMAZOK

ELEKES GYÖRGY

1. Erdős és az ötszögrácsok

Az alábbiakban ismertetendő vizsgálatok elindításában szintén Erdős Pálnak volt meghatározó szerepe. Érdemes részletesen felidézni a történetet, mert így bepillantást nyerhetünk matematikai gondolkodásmódjába is: mennyire „nem hagyományosan" állt ő hozzá a matematikai problémákhoz. Az időpont: az 1980-as évek vége; a helyszín: Visegrád, egy geometriai témájú nemzetközi összejövetel.

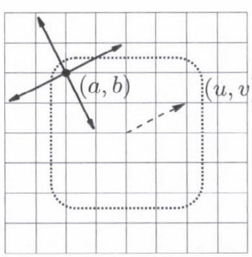
1.1. Négyzetek és háromszögek. Arról folyt a szó egy közös vacsoránál, milyen sok négyzetnek vagy szabályos háromszögnek a csúcsait tartalmazhatja n síkbeli pont. Érezhető, hogy a négyzetrács, illetve a szabályos háromszögrács alkalmas részhalmaza adja az optimumot.

1.1. példa. Az n pontú, $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$-es négyzetrács legalább cn^2 darab különböző négyzetnek tartalmazza mind a négy csúcsát.

Valóban, legyen például $n = (4k+1)^2$ és álljon a rács az

$$\{(i,j);\ -2k \le i,j \le 2k\}$$

pontokból. Nevezzük a rács „magjának" azon pontokat, melyekre $-k \le i,j \le k$ (lásd 1. ábra).

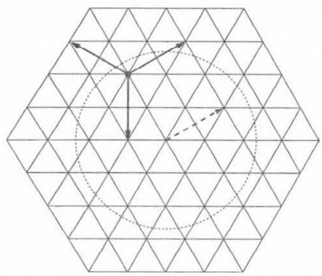


1. ábra. Magbeli (a,b)-ből magbeli (u,v) vektor forgatásával adódó négyzet.

Bármely magbeli (a,b) pont „sok" négyzetnek lesz középpontja: tetszőleges magbeli (u,v) pont helyvektorát használva és (a,b)-ből akár (u,v)-vel, akár $(-v,u)$,

$(-u,-v)$ vagy $(v,-u)$ bármelyikével elmozdulva az eredeti rács négy olyan pontját kapjuk, melyek egy négyzet csúcsai. Az ilyenek száma pedig legalább $(2k+1)^2 \cdot (2k+1)^2 \approx n^2/16$. Minden négyzetet négyszer számoltunk; a különbözőek száma tehát $\approx n^2/64$. (Gondosabb számolással $c = 1/64$-nél jobb konstans szorzó is kapható.)

1.2. példa. A szabályos háromszögrácsnak pl. a 2. ábrán látható hatszög alakú részébe eső n pont legalább cn^2 darab különböző szabályos háromszögnek tartalmazza mind a három csúcsát.



2. ábra. Szabályos háromszögrács hatszög alakú része és annak magja.

(A bizonyítás az előzőhöz hasonló: a magba ismét a pontok kb. negyede esik és egy ilyenből tetszőleges magbelinek a helyvektorával – valamint annak most 120°-kal és a 240°-kal elforgatottjaival – elmozdulva ismét egy rácsháromszög csúcsait kapjuk.)

Az is könnyen igazolható, hogy cn^2-nél nagyságrendileg jobb konstrukció nemcsak négyzet vagy háromszög, de *semmilyen minta* esetén sem létezhet.

1.3. lemma. *Tetszőleges, legalább három pontú $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ mintahalmaznak legfeljebb $2n(n-1)$ hasonló példánya fordulhat elő a sík n pontja között.*

Bizonyítás. Az A_1 pontot n helyre képezhetjük; A_2-re $n-1$ lehetőség marad; A_3-ra pedig – a pozitív vagy negatív körüljárás függvényében – legfeljebb kettő. ∎

Mi a helyzet szabályos ötszögekkel? (Ilyenek a fenti pontrácsokban nem találhatók.) Erről szól a következő szakasz.

1.2. Ötszögek. Erdősnek megtetszett az ötszögekre vonatkozó kérdésem és együtt kezdtünk gondolkodni rajta. Először a felső becslés javításával próbálkoztunk, ám ő hamarosan irányt váltott:

– Inkább ötszögrácsokat kellene definiálnunk – mondta. Meglepődtem.

– De Pali bácsi, ötszögrácsok nem léteznek! – csodálkoztam.

– Úgy van – válaszolta – épp ezért kell *definiálnuk* egyet!

Neki lett igaza, mint az alábbi definícióból és az 1.6. állításból látható [5].

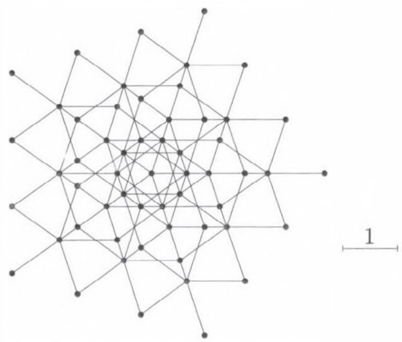
1.4. definíció. Azonosítsuk az euklideszi síkot a komplex számok halmazával és legyen $\varepsilon = \cos 72° + i \sin 72°$ az ötödik komplex egységgyökök közül az első. Nevezzük „ál-ötszögrácsnak" a következő ponthalmazt:

$$\mathcal{G}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{a_3\varepsilon^3 + a_2\varepsilon^2 + a_1\varepsilon + a_0;\ a_i \in \mathbb{Z}\},$$

ahol $\mathbb{Z}$ szokás szerint a – pozitív és negatív – egészek halmazát jelöli. A definícióba ε^4-t már nem érdemes belekeverni, ez ugyanis az

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = 0 \tag{1}$$

összefüggésből kifejezhető.



3. ábra. A $\mathcal{G}_\infty$ ál-ötszögrács néhány pontja. (Az egység-szakaszokkal összekötött pontpárokat reprezentáló komplex számok különbsége ε-hatvány.)

1.5. megjegyzés. Ez az „ál-rács" nem diszkrét pontokból áll, mint a szokásos háromszög- vagy négyzetrács. (Sőt még az is igaz, hogy $\mathcal{G}_\infty$ sűrű az egész síkon.) Arra viszont megfelel, hogy az 1.1 és 1.2. példákhoz hasonló konstrukciót mutassunk sok ötszöggel.

1.6. állítás. *$\mathcal{G}_\infty$ alkalmas n pontja cn^2 darab szabályos ötszög csúcsait tartalmazza.*

Bizonyítás. Vezessük be a

$$\mathcal{G}_m \stackrel{\text{def}}{=} \{a_3\varepsilon^3 + a_2\varepsilon^2 + a_1\varepsilon + a_0;\ \forall|a_i| \le m\} \subset \mathcal{G}_\infty,$$

jelölést! Nyilván $|\mathcal{G}_m| = (2m+1)^4$. Tegyük fel, hogy $n = (6m+1)^4 = |\mathcal{G}_{3m}|$, ahol $\mathcal{G}_{3m}$ definíciója $\mathcal{G}_m$-éhez hasonló, m helyett $3m$-es korláttal az $|a_i|$-ekre. A korábbi példák gondolatmenetét követjük, $\mathcal{G}_{3m}$ magjának $\mathcal{G}_m$-et tekintve.

Legyen $a = a_3\varepsilon^3 + a_2\varepsilon^2 + a_1\varepsilon + a_0 \in \mathcal{G}_m$ és $u = u_3\varepsilon^3 + u_2\varepsilon^2 + u_1\varepsilon + u_0 \in \mathcal{G}_m$ tetszőleges! Belátjuk, hogy az $a + u\varepsilon^i$ pontok $i = 0, \ldots, 4$-re mind $\mathcal{G}_{3m}$-beliek. Ehhez elég annyit igazolni, hogy $\mathcal{G}_{2m}$ tartalmazza mind az öt $u\varepsilon^i$-t.

Tekintsünk tehát egy ilyen $u\varepsilon^i = u_3\varepsilon^{i+3} + u_2\varepsilon^{i+2} + u_1\varepsilon^{i+1} + u_0\varepsilon^i$ értéket! Itt az ε-hatványok egy kivétellel „szépek"; például ε^7, ε^6, ε^5 rendre ε^2-tel, ε-nal, illetve 1-gyel egyenlő az $\varepsilon^5 = 1$ azonosság miatt. Az egyetlen ε^4-es tagban pedig (1)-et használhatjuk; így $u\varepsilon^i$-ban minden együttható valóban legfeljebb $2m$ lesz.

Azt kaptuk, hogy a $|\mathcal{G}_m| = (2m+1)^4$ darab a mindegyike középpontja lesz az ugyanennyi darab u segítségével képzett szabályos ötszögeknek. Mivel minden ilyet legfeljebb ötféleképpen kaptunk meg, a különböző szabályos ötszögek száma legalább

$$\frac{1}{5}|\mathcal{G}_m|\,|\mathcal{G}_m| = \frac{(2m+1)^8}{5} > \frac{(6m+1)^8}{5\cdot 3^8} = \frac{|\mathcal{G}_{3m}|^2}{5\cdot 3^8} = cn^2. \;\blacksquare$$

2. Általános minták

2.1. definíció. Tetszőleges $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ ponthalmazokra legyen $\mathcal{A}$ hasonló példányainak száma $\mathcal{B}$-ben

$$H(\mathcal{A},\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \#\{\mathcal{A}' \subset \mathcal{B};\ \mathcal{A}' \sim \mathcal{A}\},$$

ahol „$\sim$" azt jelöli: azonos körüljárású hasonló; azaz kicsinyített vagy nagyított, esetleg elforgatott vagy eltolt példány. (A tükrözést nem engedjük meg! Ezáltal persze legfeljebb egy 2-es szorzót veszíthetünk.) Vezessük még be a

$$h(\mathcal{A},n) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{H(\mathcal{A},\mathcal{B});\ |\mathcal{B}| = n\}$$

jelölést is; ez a legnagyobb darabszám, ami adott $\mathcal{A}$-ra és hozzá ügyesen választott $\mathcal{B}$-re elérhető.

A kérdés, amivel foglalkozunk:

adott $\mathcal{A}$ mellett mi $h(\mathcal{A},n)$-nek, mint n függvényének nagyságrendje?

Az 1.3. lemma szerint $h(\mathcal{A},n) \le 2n(n-1)$, azaz a nagyságrend bármely minta esetén legfeljebb négyzetes lehet. Ez négyzetre, valamint szabályos három-, illetve ötszögre el is érhető az 1.1 és 1.2. példák, illetve az 1.6. állítás szerint. Az utóbbiban szereplő ötletet alkalmasan általánosítva az $\mathcal{A}$ minták további, igen széles osztályára igazolható, hogy $h(\mathcal{A},n) \ge cn^2$ – sőt az is, hogy a nagyságrend *minden* minta esetén „majdnem négyzetes".

Az ál-ötszögrács lényeges tulajdonsága az volt, hogy az ε ötödik egységgyöknek létezik olyan hatványa, amelyik kifejezhető a kisebb kitevőjűekkel; éspedig ε^4 az $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4 = 0$ összefüggésből. Általában egy ζ valós vagy komplex számot *algebrainak* nevezünk, ha van olyan egész együtthatós $p(x) \not\equiv 0$ polinom, melynek ζ gyöke, azaz $p(\zeta) = 0$.

2.2. tétel. (i) *Ha az $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ véges minta reprezentálható olyan komplex számokkal, melyek mind algebraiak, akkor*

$$h(\mathcal{A}, n) \geq c(\mathcal{A}) \cdot n^2,$$

ahol a $c(\mathcal{A}) > 0$ konstans nem függ n-től.

(ii) *Minden $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ véges mintára és minden $\delta > 0$-ra*

$$h(\mathcal{A}, n) \geq c'(\mathcal{A}, \delta) \cdot n^{2-\delta},$$

ahol a $c'(\mathcal{A}, \delta) > 0$ konstans sem függ n-től.

A bizonyítás alapötlete az 1.6. állításban látotthoz hasonló konstrukció [5]; ezt terjedelmi okokból nem részletezzük.

Algebrai minták esetén e tétel (i) része a pontos nagyságrendet adja. Mi a helyzet „transzcendens", vagyis algebrai komplex számokkal nem reprezentálható mintákkal? Igaz-e, hogy ezekre nem érhető el a négyzetes nagyságrend? A következő szakaszban ezt vizsgáljuk tetszőleges (nem feltétlenül algebrai) háromszögekre.

2.1. Négyzetes gyakoriságú háromszögek. Rögzítsünk egy $\mathcal{A}$ háromszöget! Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy komplex számokkal reprezentálva $\mathcal{A} = \{0, 1, \zeta\}$, különben alkalmas forgatással/eltolással ilyenbe vihetjük. Milyen ζ értékekre fordulhat elő a fenti $\mathcal{A}$ minta négyzetes nagyságrendben?

A további vizsgálatokban az összeghalmazok kapcsán (IV. rész) megismert általánosított számtani sorozatokat használjuk. Ezek felidézése után térünk majd rá a tulajdonképpeni elemzésre.

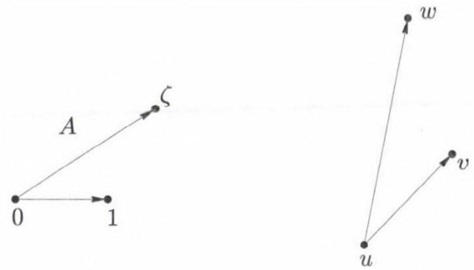
Adott d pozitív egész és $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_d$ valós vagy komplex különbségek mellett $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d$ méretű általánosított számtani sorozatnak nevezzük a $G = \{k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + \ldots + k_d\Delta_d;\ \forall i \leq d\text{-re } 0 \leq k_i < n_i\}$ halmazt. Tetszőleges d dimenziós G általánosított számtani sorozat $G + G = \{g' + g'';\ g', g'' \in G\}$ összeghalmazára, illetve $G - G = \{g' - g'';\ g', g'' \in G\}$ különbséghalmazára $|G \pm G| \leq 2^d|G|$.

Legyen X valós vagy komplex számhalmaz, E pedig egy gráf élhalmaza X elemein mint csúcsokon. Adjuk össze minden $(x', x'') \in E$ él mentén a végpontoknak megfelelő x', x'' számokat, és legyen a páronkénti összegek halmaza $X +_E X$. Laczkovich és Ruzsa tétele, (IV. rész 2.6.(ii) tétel, a Balog–Szemerédi-tétel élesítése) olyan X-ekről szól, melyekből „sok" ilyen összeget képezve csak „kevés" lesz különböző. Pontosabban: tegyük fel, hogy

$$|E| \geq c|X|^2 \qquad \text{és} \qquad |X +_E X| \leq C|X|. \tag{2}$$

Ekkor található olyan G általánosított számtani sorozat, melynek dimenziója legfeljebb $d^*(c, C)$, mérete legfeljebb $C^*(c, C)$ és amelyik legalább $c^*(c, C) \cdot |X|^2$ eredeti élt feszít; vagyis az $E^* = G^2 \cap E$ jelöléssel $|E^*| \geq c^*(c, C) \cdot |X|^2$. (Itt d^*, C^* és c^* nem függ $|X|$-től.)

Térjünk most vissza a négyzetes gyakoriságú háromszögekre! Abból indulunk ki tehát, hogy valamely n elemű $\mathcal{B}$ ponthalmazban $h(\mathcal{A},\mathcal{B}) = h(\mathcal{A},n) \geq cn^2$ darab $\mathcal{A} = \{0,1,\zeta\}$-hoz hasonló u, v, w hármas található. Legyen E azon $u,v \in \mathcal{B}$ párok halmaza, melyek kiegészíthetőek ilyen háromszöggé!



4. ábra. Hasonló háromszögek: $w - u = \zeta(v-u)$.

Feltételünk szerint $|E| \geq cn^2 = c|\mathcal{B}|^2$; ugyanakkor vegyük észre, hogy egy ilyen komplex számhármasban $w - u = \zeta(v-u)$ (lásd 4. ábra), tehát

$$w = u + (w-u) = u + \zeta(v-u) = (1-\zeta)u + \zeta v. \tag{3}$$

Természetesen ezek a lineáris kombinációk mind $\mathcal{B}$-beliek: $(1-\zeta)\mathcal{B} +_E \zeta\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$, s így

$$\left|(1-\zeta)\mathcal{B} +_E \zeta\mathcal{B}\right| \leq |\mathcal{B}| \tag{4}$$

„sok", pontosabban legalább $c|\mathcal{B}|^2$ darab $(u,v) \in E$ komplex számpárra. A (2) alatti feltétel teljesül $X = (1-\zeta)\mathcal{B} \cup \zeta\mathcal{B}$-re és $C = 1$-re; található G általánosított számtani sorozat, ami legalább $c^*(c) \cdot n^2$ darab eredeti E-beli élt feszít. Jelöljük ezek halmazát E^*-gal!

Őszinte beismerő vallomás következik: itt valamit elnagyoltunk! A (4) alatti összeadandók NEM az eredeti $(u,v) \in E$ élek végpontjai! Úgy értjük a képlet bal oldalát, hogy u-t, illetve v-t előbb a megfelelő együtthatóval szorozzuk, majd ezeket a szorzatokat adjuk össze. A talált E^* élek eszerint nem G elempárjait, hanem az

$$u \in \frac{1}{1-\zeta} \cdot G \qquad \text{és} \qquad v \in \frac{1}{\zeta} \cdot G \tag{5}$$

elemeket kötik össze (mert $(1-\zeta)u \in G$ és $\zeta v \in G$). Az alábbi eredményre jutottunk [7].

2.3. állítás. *Ha az n elemű $\mathcal{B}$ ponthalmazban legalább cn^2 darab u,v,w hármas hasonló $\mathcal{A} = \{0,1,\zeta\}$-hoz, akkor létezik $d^*(c)$ dimenziós, $C^*(c) \cdot n$ méretű G általánosított számtani sorozat, hogy legalább $c^*(c) \cdot n^2$ darab $u,v \in \mathcal{B}$ párra*

$$\begin{aligned} u &\in G/(1-\zeta); \\ v &\in G/\zeta; \\ w = (1-\zeta)u + \zeta v &\in G + G. \end{aligned}$$

A megfelelő u, v párok halmazát a továbbiakban E^*-gal jelöljük.

Bizonyítás. A fenti elemzésből és az előtte felidézett Laczkovich–Ruzsa-tételből nyilvánvaló. ∎

2.4. megjegyzés. Ha az általánosabb $\mathcal{A} = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ minta-háromszögből indultunk volna, akkor $u \in (\zeta_2 - \zeta_1)G/(\zeta_2 - \zeta_3)$, $v \in (\zeta_2 - \zeta_1)G/(\zeta_3 - \zeta_1)$, $w \in G + G$-re jutnánk.

2.2. Minden háromszög jó! Most már el tudjuk dönteni azt a kérdést, mely háromszögek fordulhatnak elő négyzetes nagyságrendben. A válasz: *mindegyik!* (Az algebraiság sem feltétlenül szükséges.) Bármely – akár transzcandens – ζ-hoz tetszőleges G általánosított számtani sorozatból készíthetünk a 2.3. állítás alapján alkalmas ponthalmazt; könnyen látható, hogy $\mathcal{B} = \big(G/(1-\zeta)\big) \cup (G/\zeta) \cup (G+G)$ mindig megfelel.

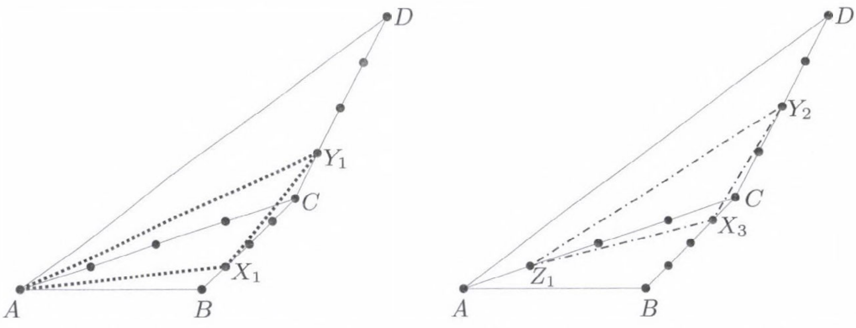
Mivel ez a példa nem igazán szemléletes, másik, elemi konstrukciót is mutatunk [5] – ami valójában ennek speciális esete lesz.

2.5. tétel. *Tetszőleges Δ háromszög és $n = 3m + 1$ esetén*

$$h(\Delta, n) \geq \frac{1}{18} n^2.$$

Bizonyítás. Jelöljük A, B, C-vel a Δ minta-háromszög csúcsait, α-val az A-nál levő szöget! Legyen $\lambda = \frac{AC}{AB}$ és ϕ az a forgatva nyújtás, melynek középpontja A, szöge α és aránya λ. Ekkor $\phi(A) = A$ és $\phi(B) = C$. Vezessük be a $D = \phi(C)$ jelölést is!

Tegyük fel, hogy $n = 3m + 1$, és osszuk m egyenlő részre a BC szakaszt a $B = X_0, X_1, \ldots, X_{m-1}, X_m = C$ osztópontokkal, a CD szakaszt pedig a $C = Y_0$, $Y_1, \ldots, Y_{m-1}, Y_m = D$-vel! Ekkor minden $0 \leq i \leq m$-re az AX_iY_i háromszög hasonló lesz a Δ mintához (lásd a pontozott háromszöget az 5. ábrán).



5. ábra. Hasonló háromszögek. A pontozott AX_1Y_1 forgatva nyújtással keletkezett ABC-ből.

Valóban, a ϕ forgatva nyújtás BC-t CD-be viszi; speciálisan X_i-t Y_i-be; következésképpen $AX_i/AY_i = \lambda$ és a közbezárt szög is α, mint ABC-ben. Így $AX_iY_i \sim ABC$.

Osszuk még fel AC-t is m részre: $A = Z_0, Z_1, \ldots, Z_{m-1}, Z_m = C$. Összesen $n = 3m + 1$ darab X_i, Y_j és Z_k pontot kaptunk (azért nem $3m + 3$-at, mert C-t háromszor számoljuk). A fentiekhez hasonlóan látható, hogy minden olyan $0 \leq j \leq m$ és $0 \leq k \leq m$ esetén, melyekre $j + k \leq m$,

$$Z_k X_{j+k} Y_j \sim ABC.$$

(Lásd pl. a szaggatott vonallal rajzolt háromszöget az 5. ábrán $k = 1$ és $j = 2$ mellett.) Az egyetlen kivétel a $Z_m X_m Y_0$ elfajuló, egyedül a C pontból álló háromszög lesz. Mivel minden k-hoz $m - k + 1$ darab ilyen háromszöget kapunk, ez összesen $(m+1) + m + (m-1) + \ldots + 2 \approx m^2/2 \approx n^2/18$ darab. (Pontosabb számolással az is kiderül, hogy még több is ennél.) ∎

A tétel bizonyításában mutatott konstrukció valóban speciális esete az előtte látottnak, például ha C-t a komplex 0-val azonosítjuk, D-t 1-gyel, az A pontot $1/(1-\zeta)$-val, B-t pedig $-1/\zeta$-val.

Ezek után valószínűleg mindenki azt várja, hogy *kivétel nélkül minden mintára* négyzetes lesz a nagyságrend – az algebrai reprezentálhatóságtól függetlenül. A háromnál több pontú transzcendens mintákkal azonban nem boldogultunk [5]-ben; vagyis függőben maradt a következő kérdés:

Igaz-e, hogy tetszőleges (akár transzcendens) mintára $h(\mathcal{A}, n) \geq c_{\mathcal{A}} \cdot n^2$*?*

Ezzel foglalkozunk a következő szakaszban.

3. Transzcendens minták

A történet folytatásában jelen cikk szerzőjére már csak krónikási – és, mint látni fogjuk, postási – feladatok maradnak; a két főszereplő Laczkovich Miklós és Ruzsa Imre. Ezt is érdemes részletezni, mert arra mutat példát, hogyan segíti egy jól működő kombinatorikai iskola a gyönyörű (és mély) új eredmények születését.

Sikertelen megoldási kísérletek után Erdős is, magam is sokaknak elmondtuk az előző szakaszt záró kérdésünket; ezek egyike volt Laczkovich Miklós. Néhány hét múlva összetalálkoztunk a Matematikai Kutatóintézet (ma Rényi Intézet) kapujában. Éppen Sós Vera egyik speciálkollégiumáról jöttem, ahol az összeghalmazokra vonatkozó Balog–Szemerédi-tétel (IV. rész 2.6.(i) tétel) volt terítéken; az előadás hallgatói a cikk egy-egy különnyomatát is megkapták.

– Gondolkoztam a transzcendens mintákon – mondta Mik. – Úgy sejtem, hogy a pontnégyesek kettősviszonyán múlik a nagyságrend. A bizonyításhoz valami olyasmire lenne szükség, hogy ha egy számhalmazból sok pár összege esik a halmazba, akkor annak tartalmaznia kell egy számtani sorozathoz hasonló struktúrát.

Megpróbáltam egy bűvész gyorsaságával kapni elő a különnyomatot. Sikerült. (A mutatvány előkészítése persze nem az én érdemem volt.)

– Erre gondolsz? – Belelapozott, felcsillant a szeme. Nemsokára Ruzsa Imrével sikerült élesíteniük a Balog–Szemerédi-tételt; ennek segítségével pedig megoldották a transzcendens minták problémáját is. A válasz meglepő: a nagyságrend valóban a *kettősviszonyok* algebrai voltán múlik [7] – annak ellenére, hogy a kettősviszony nemcsak hasonlóság-, hanem projektív invariáns! Az a, b, c, d valós vagy komplex számnégyes kettősviszonya szokás szerint

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}.$$

3.1. tétel. *Legyen $\mathcal{A} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_t\} \subset \mathbb{C}$, azaz reprezentáljuk $\mathcal{A}$-t az ζ_i komplex számokkal!*

(i) *Ha az ζ_i-k közül bármely négy kettősviszonya algebrai, akkor $h(\mathcal{A}, n) \geq c(\mathcal{A})n^2$;*

(ii) *Ha $\mathcal{A}$-ban nem minden kettősviszony algebrai, akkor $h(\mathcal{A}, n)/n^2 \to 0$.*

Az (i) rész a 2.2. tételre való visszavezetéssel látható be; (ii) igazolása pedig az általánosított számtani sorozatok transzcendens lineáris kombinációinak következő tulajdonságán múlik: $|\mathcal{G} \cap \lambda\mathcal{G}|/|\mathcal{G}| \to 0$, ha λ transzcendens és $|\mathcal{G}| \to \infty$. A bizonyítást nem részletezzük.

A transzcendens minták (véletlen elemeket is tartalmazó) történetének végén legyen szabad a krónikásnak levonni a tanulságot: nagy érték és méltán világhírű az a matematikai iskola (kombinatorikai vagy más), melynek környékén a hasonló esetek nem számítanak rendkívülinek.

4. Egyéb problémák

4.1. Közel optimális ponthalmazok struktúrája. A $h(\mathcal{A}, n)$ függvényre csak becslések ismeretesek, pontos értékeit nem tudjuk – még a legegyszerűbb esetben sem, amikor a minta szabályos háromszög. Jelöljük ez utóbbit a továbiakban Δ-val! Az erre vonatkozó legjobb alsó korlát Ábrego és Fernández-Merchant eredménye [2]:

$$h(\Delta, n) \geq \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right)n^2 \approx 0{,}1955n^2.$$

Milyen struktúrájú $\mathcal{B}$ halmaz adhatja a legjobb konstrukciót? A 2.3. állítás – bár nem ad pontos választ – értékes információval szolgál: $\mathcal{B}$ nagy része szükségképpen egy alkalmas általánosított számtani sorozatba esik. Sőt ez akkor is fennáll, ha a szabályos háromszögek száma csak *nagyságrendben* közelíti meg a maximumot, azaz $h(\Delta, n) \geq cn^2$. Ugyanakkor a 2.2. szakasz elején említettük, hogy bármely G általánosított számtani sorozatból kiindulva készíthető ilyen példa. Eszerint a közel optimális struktúrák bizonyos értelemben *stabilak:* a maximumtól konstans szorzóval eltérve még mindig ugyanolyan szerkezetű halmazokkal találkozunk.

Érdekes viszont, hogy *más* értelemben a stabilitás nem tökéletes. Az általánosított számtani sorozatok ugyanis sokfélék lehetnek már $\mathbb{R}$-ben is; hát még $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$-ben. A legegyszerűbb az $1, 2, \ldots, n$, de például a háromszögrács is ilyen; ezt az 1 és a $-1/2 + (\sqrt{3}/2)i$ komplex számok generálják. Érezhető persze, hogy az utóbbi ad több szabályos háromszöget. Be is bizonyítható [1], hogy ha az optimumhoz elég közel vagyunk; pontosabban ha $H(\Delta, \mathcal{B}) \geq (1/6 + \varepsilon)n^2$, akkor $\mathcal{B}$-nek tartalmaznia kell nagy $k \times k$-as háromszögrácsot – feltéve, hogy $n > n_0(k, \varepsilon)$. Ugyanakkor a 2.5. tétel bizonyításában konstruált ponthalmaz három egyenesre esik; ilyen rácsot tehát nem tartalmazhat, ha $k \geq 4$. (Persze ott $c < 1/6$-os konstans szorzó adódott.) Ebben az értelemben az optimális struktúra nem teljesen stabil.

Egyéb olyan mintákra is ismeretesek bizonyos részeredmények [1], amelyekre a nagyságrend eléri a cn^2-et – vagyis általános háromszögekre és négy vagy több pontú *algebrai* $\mathcal{B}$ halmazokra. Nem tudunk viszont semmit a transzcendens minták esetén optimális struktúrákról. Ez azon múlik, hogy az additív számelmélet általunk használt eredményei (lásd a Laczkovich–Ruzsa-tételt és az egész IV. részt) nem mondanak semmit cn^2-nél kevesebb összegről.

4.2. Magasabb dimenziós kérdések. Az r dimenziós euklideszi tér n elemű $\mathcal{B}$ ponthalmazaira és tetszőleges, akár kisebb dimenziós $\mathcal{A}$ mintákra vezessük be a

$$h^{(r)}(\mathcal{A}, n) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{H(\mathcal{A}, \mathcal{B});\ \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^r,\ |\mathcal{B}| = n\right\}$$

jelölést! Erről a függvényről még a legegyszerűbbnek tűnő nagyságrendek sem ismertek.

Jelölje Δ^3 a térbeli szabályos tetraédert, általában pedig Δ^r az r dimenziós szabályos szimplexet (vagyis $r = 2$-re $\Delta^2 = \Delta$, a szabályos háromszög).

4.1. probléma. *Határozzuk meg $h^{(3)}(\Delta^2, n)$ és $h^{(3)}(\Delta^3, n)$ nagyságrendjét!*

Egyszerűen kaphatunk felső becslést egy szögekre vonatkozó, önmagában is érdekes korlátból. Jelöljük $f(n)$-nel azt a legnagyobb számot, ahányszor egy adott szög a háromdimenziós tér n pontja között előfordulhat! Nyilván legfeljebb $3 \cdot \binom{n}{3} \approx n^3/2$ példány lehetséges; ugyanakkor Conway, Croft, Erdős és Guy eredménye szerint a nagyságrend harmadfokúnál mindig kisebb [4]:

$$f(n)/n^3 \to 0 \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Szokás ezt a tulajdonságot $f(n) = o(n^3)$ formában rövidíteni, ahol a „$o(.)$" (kis ordó) jelentése: kisebb nagyságrendű. Innen (és az 1.2. példából) könnyen következik, hogy

$$cn^2 \leq h^{(2)}(\Delta^2, n) \leq h^{(3)}(\Delta^2, n) = o(n^3).$$

A közelmúltban Akatsu–Tamaki–Tokuyama javította meg a felső korlátot $cn^{2,2}$-re; sőt ezt a négydimenziós térre is belátták: $h^{(4)}(\Delta^2, n) \leq cn^{2,2}$ [3]. Öt dimenzóban

Ábrego és Fernández-Merchant [2] találta a $h^{(5)}(\Delta^2, n) \le cn^{3-1/9}$ becslést. Ugyancsak ők vették észre, hogy $r \ge 6$ dimenziós terekben viszont $h^{(r)}(\Delta^2, n)$ nagyságrendje már mindig cn^3. Nagyobb persze nem lehet; a III. rész 1.4. példájához hasonló „általánosított" Lenz-konstrukció pedig ad is ennyit, alkalmas $(x_i, y_i, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, z_i, w_i, 0, 0)$ és $(0, 0, 0, 0, u_i, v_i)$ pontokra, ha $x_i^2 + y_i^2 = z_i^2 + w_i^2 = u_i^2 + v_i^2 = 1/2$.

Szabályos tetraéderekből a $60°$-os térbeli paralelogramma-rácsban $\ge cn^{4/3}$ darab található (sőt már az *egyállású hasonlóakból* is van ennyi); ugyanakkor $h^{(3)}(\Delta^3, n) \le \frac{1}{2} h^{(3)}(\Delta^2, n)$, mert minden ilyen tetraédert négy szabályos háromszög határol és egy háromszögre legfeljebb két tetraéder illeszkedhet. Innen

$$c_1 n^{4/3} \le h^{(3)}(\Delta^3, n) \le c_2 n^{2,2}.$$

Végül a háromdimenziós $\square^3$ kockára $h^{(3)}(\square^3, n) \ge cn^{5/3}$; ugyanis Sárközi [8] egy eredménye szerint a térbeli kockarács $n = \sqrt[3]{n} \times \sqrt[3]{n} \times \sqrt[3]{n}$ pontú részében ennyi található. A pontos nagyságrend itt sem ismert.

Irodalom

[1] Bernardo Ábrego, György Elekes and Silvia Fernández-Merchant, Structural results for planar sets with many similar subsets, *Combinatorica,* **24 (4)** (2004), 541–554.

[2] Bernardo Ábrego and Silvia Fernández-Merchant, On the maximum number of equilateral triangles I–II, *Discrete and Computational Geometry,* **23** (2000), 129–1350. and part II., to appear in 2002.

[3] Tatsuya Akutsu, Hishao Tamaki and Takeshi Tokuyama, Distribution of distances and triangles ..., *Discrete and Computational Geometry,* **20** (1998), 307–331.

[4] John H. Conway, Hallard T. Croft, Paul Erdős and Michael J. T. Guy, On the distribution of angles ..., *Journal of London Math. Soc.*, second series, **19** (1979), 137–143.

[5] György Elekes and Paul Erdős, Similar configurations and pseudo grids, in: *Intuitive geometry,* Proceedings of the 3rd international conference held in Szeged, Hungary, from 2 to 7 September, 1991. Amsterdam: North-Holland, Coll. Math. Soc. János Bolyai, **63** (1994), pp. 85–104.

[6] Ron Graham and Jaroslav Nešetřil, editors, *The Mathematics of Paul Erdős,* Springer (1996).

[7] Miklós Laczkovich and Imre Z. Ruzsa, *The Number of Homothetic Subsets,* in Graham and Nešetřil [6] (1996).

[8] András Sárközi, Lattice cubes in 3-space, *Mat. Lapok,* **12** (1961), 232–245.

ÖSSZEFÜGGÉSEK A KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁSBAN
I. OPTIMALIZÁLÁS GRÁFOKON

FRANK ANDRÁS[1]

Tartalom

0. Bevezetés

„Az utóbbi időben kiderült, hogy a diszkrét programozás és kombinatorika sokkal szorosabb kapcsolatban van egymással, mint ahogy korábban gondolták. A kombinatorika igen nagy része foglalkozik diszkrét struktúrák optimalizációs kérdéseivel, vagy átfogalmazható úgy, hogy ezzel foglalkozzon."

E szavakkal kezdődik Lovász László [41] negyedszázada íródott *Gráfelmélet és diszkrét programozás* című, a Matematikai Lapokban megjelent összefoglaló dolgozata. Jelen munkában a klasszikusnak számító eredmények vázlatos ismertetését követően néhány terület azóta elért fejlődését szeretném áttekinteni. Az első rész döntően gráfok összefüggőségeivel, utakkal, fákkal, vágásokkal, folyamokkal kapcsolatos problémákat vizsgál, míg a második a háttérben megbúvó mélyebb összefüggéseket igyekszik feltárni a szubmoduláris technika és a poliéderes kombinatorika elemeinek bemutatásával.

Egy összefüggő gráf minimális költségű feszítő fáját Kruskal mohó algoritmusával kereshetjük meg. Minimális költségű út konstruálására szolgál Dijkstra eljárása,

[1]Készült az OTKA K60802 sz. pályázata valamint az Ericsson Hungary támogatásával.

amikor a költségek nemnegatívak. Páros gráf maximális elemszámú párosításának meghatározását az alternáló utas módszerrel végezhetjük, míg egy maximális súlyú párosítást a Magyar Módszer segítségével lehet megtalálni. Hasonló elven működő eljárásokkal kereshető egy irányított gráf (röviden digráf) két pontja között k darab pont- vagy élidegen út, illetve ilyenek közül a minimális összköltségű. Ezek kezelésére szolgálnak a folyam és áram (circulation) algoritmusok.

A kombinatorikus optimalizálásnak ezek a kiinduló pontjai. Maga az elnevezés először E. Lawler [38] 1976-ban (magyar fordításban 1982-ben) megjelent könyvének címében fordult elő. A kombinatorikus optimalizálás tipikusan olyan véges struktúrák optimalizálási kérdéseit vizsgálja, mint a gráfok, hálózatok, hipergráfok, részbenrendezett halmazok, matroidok. A felvetődő problémák döntő hányada **NP**-nehéz (mint például az utazó ügynök, gráf színezés, halmaz lefogás), amikor polinomiális futásidejű pontos megoldó algoritmus és/vagy jó karakterizáció létezése nem várható. Az **NP**-teljes feladatok tengeréhez képest viszonylag ritkábbak a polinomiálisan megoldható vagy legalábbis **NP** ∩ co-**NP**-ben lévő problémák. Ilyenekről szólt a harminc évvel ezelőtti szinten Lawler fentemlített műve, és ezekről ad számot A. Schrijver [49] 2003-ban megjelent enciklopédikus igénnyel íródott háromkötetes könyve is. A kettő között több kitűnő tankönyv is napvilágot látott ([1, 35, 5]).

A [22] magyar nyelvű dolgozatban összefoglalást adtam a Magyar Módszerről és annak két kiterjesztéséről: nem páros gráfok párosításaira és két matroid metszetére. Ott röviden utaltam rá, hogy az elmélet az elmúlt három évtizedben messze túllépett a matroid metszet problémakörön. A jelen munkában a kombinatorikus optimalizálás Schrijver könyve által fémjelzett irányzatának néhány fontos gondolatát, eszközét és eredményét vázolom. A dolgozat címe egyrészt a különféle témakörök közötti átjárásokra és kapcsolatokra utal másrészt azt jelzi, hogy a terület motivációiban és az eredményekben különféle összefüggőségi fogalmak játszanak központi szerepet. Összefüggőségi tulajdonságon intuitív egy (di)gráf útjaira vagy vágásaira vonatkozó előírást értünk. Például a fa egy olyan élelhagyásra nézve minimális gráf, amelyben bármely két pont között vezet út, vagy ami ezzel ekvivalens, bármely vágásban van él. Egy másik alapvető fogalom a teljes párosításé: ez egy olyan részgráf, amelyben minden csúcs által meghatározott vágásban pontosan egy él van.

A vizsgálandó kérdések alapvetően öt csoportba sorolhatók.

1. Részgráf problémák. Adott irányítatlan vagy irányított gráfban keresünk előírt összefüggőségi tulajdonsággal rendelkező részgráfot, esetleg minimális (vagy maximális) költséggel. Ilyen feladat a minimális költségű feszítő fa, a legolcsóbb út probléma és a maximális (súlyú) párosítás feladata is. Részgráf probléma a maximális folyam feladat és annak költséges változata. Idetartozik a minimális költségű feszítő fenyő vagy általánosabban a minimális költségű gyökeresen k-élösszefüggő részgráf keresése. Természetes cél lehet olyan (minimális költségű) részgráf megkonstruálására törekedni, amely tartalmaz k élidegen feszítő fát. Érdeklődhetünk egy részbenrendezett halmaz maximális olyan része iránt, amelyben nincs túl nagy lánc vagy túl nagy antilánc. A részgráf problémák között gyakori az NP-teljes: közülük az egyik legnevezetesebb az, amikor egy gráfnak keresünk olyan összefüggő részgráfját, amelynek minden pontban kettő a foka (Hamilton kör probléma). Szintén NP-teljes az a rokon probléma, amely egy digráf minimális élszámú erősen összefüggő részgráfjának megkeresését célozza. Még egy egyszerűen hangzó NP-teljes probléma a két élidegen út feladata: keressünk egy digráfban P_1 és P_2 élidegen utakat úgy, hogy P_i s_i-ből t_i-be vezet ($i = 1, 2$).

2. Növelési problémák. Ez a részgráf problémának mintegy az ellentéte: arra vagyunk kiváncsiak, hogy a kiindulási (di)gráfhoz legkevesebb hány új élt kell hozzávennünk, hogy valamely összefüggőségi tulajdonság létrejöjjön. Például hány él hozzávételével lehet egy digráfot erősen összefüggővé tenni? Meglepő, hogy az idevonatkozó részgráf problémától eltérően, erre a kérdésre kerek, nem is túl nehéz válasz adható (Eswaran és Tarjan tétele). Sokkal nehezebb a kérdés, ha például a megnövelt gráf k-élösszefüggőségét tűzzük ki célul, de amint látni fogjuk, még ez is szépen kezelhető.

3. Irányítási problémák. Itt egy irányítatlan gráf éleit kell megirányítani úgy, hogy bizonyos előírt összefüggőségi tulajdonságok fennálljanak. Például kereshetünk egy gráfnak erősen összefüggő irányítását vagy fokszám-előírt irányítását. Célunk lehet egy irányított gráf minimális számú (költségű) élének átirányítása, hogy pl. erősen összefüggő digráfot kapjunk.

4. Pakolási, fedési és színezési problémák. A pakolási feladatban megadott objektumokat kell diszjunkt módon elhelyezni. Egy (di)gráfban például mikor létezik k él- (vagy pont-)idegen út s-ből t-be? Mikor létezik egy gráfban k élidegen feszítő fa, vagy egy digráfban k élidegen feszítő fenyő? Mennyi egy digráfban a diszjunkt egyirányú vágások maximális száma? A fedési feladatban adott objektumokkal akarjuk az alaphalmazt fedni. Hogyan lehet egy gráf éleit k fával lefedni? Mikor lehet egy aciklikus digráf éleinek egy F részhalmazát k irányított úttal lefedni? Végül a színezési feladatban az alaphalmazt partícionálni szeretnénk megadott objektumokra. Mikor lehet például egy páros gráf élhalmazát k darab párosításra bontani? Mikor lehet egy részbenrendezett halmazt k láncra vagy k antiláncra felbontani?

5. Konstruktív előállítások. Valamely tulajdonság meglétére szolgáló bizonyítékok. Például egy gráf pontosan akkor összefüggő, ha egy pontjából kiindulva fel lehet építeni élek egymás utáni hozzáadásával úgy, hogy minden új élnek legalább az egyik végpontja meglévő pont. Ennél egy fokkal bonyolultabbak az ún. fülfelbontási tételek, melyek erősen összefüggő digráfok és 2-szer él- vagy pontösszefüggő gráfok előállítását adják meg.

Ezen felosztás inkább csak tájékoztató jellegű és nem jelenti a problémák diszjunkt partícióját. Előfordulhat, hogy egy probléma valamely szempontból az egyik osztályba tartozik, míg egy ekvivalens megfogalmazása a másikba. Például egy gráf maximális párosítási feladata éppúgy felfogható részgráf problémaként, mint pakolási feladatként. Vagy, egy irányítási probléma tekinthető részgráf problémának: a kiindulási G irányítatlan gráf minden élét két ellentétesen irányított párhuzamos éllel helyettesítve az így létrejött digráfban az élpárok egyik elemét kell eltörölnünk. Megfordítva, egy részgráf probléma is gyakran megfogalmazható irányítási feladatként. Az 5. szakaszban megmutatjuk, hogy a növelési és a részgráf problémák is szoros kapcsolatban állnak egymással.

A dolgozat két részből áll. A mostani első részben konkrét, főleg gráfokra vonatkozó erdemények áttekintésére kerül sor. A második rész célja megmutatni azokat az általános elveket, amelyek az eredmények hátterében állnak és a dolgokat működtetik. Itt megismerkedhetünk a szubmoduláris függvények, matroidok szerepével, valamint a poliéderes kombinatorika eszközeivel. Ezek szépen példázzák a matematikának azt a vonását, hogy jól eltalált fogalmak bevezetésével gyakran nehezebb tételekre is rövid, áttekinthető bizonyítás adható.

Nem foglalkozhat a dolgozat a kombinatorikus optimalizálás olyan más, jól kezelhető (azaz **NP** $\cap$ co-**NP**-ben lévő) és nem kevésbé fontos részeivel, mint amilyen a perfekt gráfok világa vagy azon problémák osztálya, amelyekben a paritás játszik központi szerepet: irányítatlan gráfok párosításai, útpakolásai, T-kötések, matroid partner (parity) probléma. E területről Schrijver könyvét megelőzően L. Lovász és M. Plummer: Matching Theory című könyve [42] ad szép áttekintést.

A dolgozat írásakor több, gyakran egymásnak is ellentmondó célt próbáltam szem előtt tartani. Érzékeltetni akartam, hogy a kombinatorika idehaza régóta nagy hagyományokkal rendelkező klasszikus területei mellett a kombinatorikus optimalizálás is jelentős tudományággá vált, amelynek fejlődéséhez olyan hazai nevek járultak alapvetően hozzá, mint Kőnig Dénes, Egerváry Jenő, Gallai Tibor, Lovász László, Tardos Éva. Meg kívántam mutatni, hogy a kombinatorikus optimalizálás messze túllépett a többé-kevésbé hagyományos egyetemi tananyagon (mohó algoritmus, legrövidebb utak, folyamok, Magyar módszer), és szeretném, ha az itt vázolt eredmények egy része utat találna az egyetemi oktatásba. Azt is remélem, hogy az írás kiinduló pontot jelenthet a területtel részletesebben megismerkedni szándékozóknak. Ezért vettem be az eredmények puszta ismertetésén túl egy-két egyszerűbb, de jellegzetes bizonyítást is, illetve néhány helyen (például a 3. vagy az 5. fejezet elején) a tömörebb tárgyalásmódot részletezőbb leírással váltottam fel.

A cikkben használt jelölések és fogalmak az első rész végén lévő 6. fejezetben összegyűjtve szerepelnek.

1. Optimális részgráfok

Ebben a fejezetben röviden áttekintjük a kombinatorikus optimalizálás olyan ismert kiindulási problémáit, mint a legolcsóbb út, a maximális súlyú feszítő fa, a maximális párosítás vagy a maximális folyam feladata.

1.1. Legrövidebb utak

1.1.1. Elérhetőség

Egy s-ből t-be vezető utat st-útnak hívunk. Ha a $D = (V, A)$ digráfban létezik s-ből t-be séta, akkor létezik út is. Ilyenkor azt mondjuk, hogy t elérhető s-ből. Algoritmikusan ez azt jelenti, hogy egy st-utat kell konstruálnunk, ha ilyen létezik, illetve egy könnyen ellenőrizhető bizonyítékot arra, ha nem. E célból nem csupán a t csúcs s-ből való elérhetőségét, hanem rögtön az összes csúcsét egyszerre érdemes vizsgálni. Erre szolgálnak az olyan jólismert bejárási technikák, mint a mélységi (DFS) és a szélességi (BFS) keresés. DFS-sel például lineáris időben meg lehet keresni egy acikikus digráf csúcsainak ún. topológikus sorrendjét (ahol csak előre megy él), míg a BFS használatára példa egy legkisebb élszámú st-út megkeresése.

Könnyen igazolható, hogy ha S jelöli az s-ből elérhető csúcsok halmazát, akkor S minden valódi, s-et tartalmazó S' részhalmazából vezet ki él, de S-ből nem, továbbá létezik S-t feszítő s-fenyő. Ebből látszik, hogy egy digráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha nem tartalmaz egyirányú vágást, azaz ha a csúcsok minden valódi nemüres részhalmazába lép be él.

1.1.2. Legolcsóbb séták és utak

Tegyük fel, minden csúcs elérhető s-ből. Legyen az éleken adott egy $c : A \to \mathbf{R}$ költség- (vagy másnéven súly-) függvény. Egy P út $c(P)$-vel jelölt költségén az út éleinek költségösszegét értjük. A cél minimális költségű, másnéven legolcsóbb sv-utat találni. Ha a költség negatív is lehet, akkor a feladat már az azonosan -1 súlyozás esetén is **NP**-teljes, ugyanis ekkor a legolcsóbb út feladata magában foglalja a Hamilton út problémának az előírt végpontú változatát, ami a tetszőleges végpontú Hamilton út problémához hasonlóan **NP**-teljes.

Egy s gyökerű (nem feltétlenül feszítő) F fenyőről azt mondjuk, hogy **legolcsóbb-út fenyő,** ha az F minden v pontjára az F-ben az s-ből v-be vezető egyértelmű út egy D-beli legolcsóbb út s-ből v-be. Jelölje ezen út költségét $\pi_F(v)$.

1.1.1. állítás. *Legyen $c \geq 0$. Amennyiben F legolcsóbb-út fenyő és uv olyan $V(F)$-ből $V - V(F)$-be vezető él, amely minimalizálja az ilyen élek fölött a $\pi_F(v) + c(uv)$ értéket, akkor az $F + uv$ fenyő is legolcsóbb-út fenyő.*

Ezen alapul Dijkstra algoritmusa, amely s-ből kiindulva, élek egyenkénti hozzávételével építi fel a legolcsóbb utaknak egy s-fenyőjét. Az algoritmus bonyolultsága $O(|V|^2)$.

Aciklikus digráfban még egyszerűbb a helyzet, és ráadásul tetszőleges c költségfüggvényre építhetünk egy legolcsóbb-út fenyőt, mert a pontoknak a fenyőbe kerülési sorrendje nem csak menetközben derül ki, hanem azt a DFS-sel előre kiszámított topológikus sorrend adja. Mivel c lehet negatív is, aciklikus digráfban az s-ből t-be vezető maximális súlyú út is kiszámítható.

A két speciális eset közös általánosítását kapjuk, ha a digráf tetszőleges, de nem létezik negatív összköltségű irányított kör (röviden negatív kör), másszóval a költségfüggvény **konzervatív.** Számos más alkalmazásban is alapvető, hogy egy élsúlyozásról el tudjuk dönteni, konzervatív-e vagy sem. Egy $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvényt **megengedett potenciál**nak hívunk, ha

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) \text{ fennáll minden } uv \text{ élre.} \tag{1.1}$$

Jelölje $\pi_j(v)$ a v-ben végződő legfeljebb j élű séták költségének a minimumát. Tetszőleges c esetén $j = 0, 1, 2, \ldots, n$-re könnyű kiszámítani a $\pi_j(v)$ értékeket (és az őket realizáló sétákat) a $\pi_0(v) \equiv 0$ és $\pi_{i+1}(v) = \min\big\{\pi_i(v), \min\big(\pi_i(u) + c(uv) : uv \in E\big)\big\}$ rekurzió segítségével. Adódik, hogy minden uv élre $\pi_j(v) \leq \pi_{j-1}(u) + c(uv)$. Így ha c konzervatív, akkor $\pi_n(v) = \pi_{n-1}(v)$ minden csúcsra (ahol n a pontszám) és π_n megengedett potenciál. Ha c nem konzervatív, akkor valamely v-re $\pi_n(v) < \pi_{n-1}(v)$ és ekkor a $\pi_n(v)$-t realizáló n élű séta feszít negatív kört.

1.1.2. tétel (Gallai, 1958). *A $D = (V, A)$ digráf c élsúlyozása akkor és csak akkor konzervatív, ha létezik π megengedett potenciál. Ha ráadásul c egészértékű, akkor π is választható annak. Konkrétan, ha c konzervatív, úgy π_n megengedett potenciál.*

Ha a $\pi_n(v)$ megengedett potenciál már rendelkezésre áll, akkor Dijkstra algoritmusát alkalmazhatjuk minimális költségű P út megkeresésére a $\bar{c}(uv) := c(uv) - \pi_n(v) + \pi_n(u)$ (nemnegatív!) költség-függvényre nézve. Ekkor P automatikusan minimális c-költségű út lesz, hiszen bármely s-ből t-be vezető út c-költségének és $\bar{c}$-költségének az eltérése ugyanaz az úttól független $\pi_n(t) - \pi_n(s)$ szám.

1.1.3. tétel (Duffin, 1962). *D digráfban konzervatív c költségfüggvény esetén az s-ből t-be vezető legolcsóbb út költsége egyenlő a $\max\big\{\pi(t) - \pi(s) : \pi$ megengedett potenciál$\big\}$ értékkel. Ha ráadásul c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.*

Későbbi általánosítás céljából érdemes a tételt ekvivalens alakban megfogalmazni. Egy $z : 2^{V-s} \to \mathbf{R}_+$ halmazfüggvényt **c-megengedettnek** nevezünk, ha $t \notin X$ esetén $z(X) = 0$ és

$$c(e) \geq \sum \big[z(X) : e \text{ belép } X\text{-be}\big] \quad \text{minden } e \in E \text{ élre.} \tag{1.2}$$

1.1.4. tétel. *D digráfban konzervatív c költségfüggvény esetén az s-ből t-be vezető legolcsóbb út költsége egyenlő a $\max\big\{\sum\big[z(X) : t \in X \subseteq V - s\big] : z$ c-megengedett$\big\}$ értékkel. Ráadásul, ha c egészértékű, akkor az optimális z is választható egészértékűnek. Van olyan optimális z, amelyre az $\big\{X : z(X) > 0\big\}$ halmazrendszer lánc.*

1.2. Minimális költségű fák és fenyők

1.2.1. Fák

A gráf optimalizálási feladatok közül a legkorábbi egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf minimális költségű feszítő részgráf megkeresését célozza valamely $c : E \to \mathbf{R}$ költségfüggvényre nézve.

Ez a mohó algoritmus különféle változataival történhet, melyek helyességének igazolása az alábbi megfigyeléssel könnyű.

1.2.1. állítás. *Jelölje T_1 és T_2 két V-t feszítő fa élhalmazát. Ekkor bármely $e \in T_1$ élre van olyan $f \in T_2$ él, amelyre mind $T_1 - e + f$, mind $T_2 - f + e$ fa.*

1.2.2. tétel. *Az eljárás végére kapott feszítő fa minimális költségű, ha* [Kruskal mohó algoritmusa:] *egymás után mindig a legolcsóbb élt választjuk csak arra ügyelve, hogy a kiválasztott élek ne feszítsenek kört, vagy ha* [Prim algoritmusa:] *egy s pontból kiindulva az aktuálisan meglévő részfához mindig az abból kilépő legolcsóbb élt választjuk.* [Óvatos vagy duális mohó algoritmus:] *Ha egymás után mindig a legdrágább élt töröljük ki csak arra ügyelve, hogy a maradék gráf továbbra is összefüggő legyen, úgy a végül megmaradó feszítő fa minimális költségű lesz.*

Az 1.2.1. állításnak érdekes következménye az alábbi optimalitási feltétel, ami durván azt mondja ki, hogy egy fa pontosan akkor optimális, ha a „közelében" nincs olcsóbb fa.

1.2.3. tétel. *Egy élsúlyozott gráfban egy F feszítő fa akkor és csak akkor minimális súlyú, ha minden e nem-fa él súlya legalább akkora, mint az $F + e$ alapköréből vett bármely él súlya.*

Egy alkalmazás

A mohó algoritmust néha meglepő körülmények között lehet alkalmazni. Segítségével például eldönthető, hogy egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráf vajon részfa hipergráf-e, azaz létezik-e egy (V, F) fa úgy, hogy minden hiperél F egy részfáját feszíti. Ennek érdekében minden (u, v) párra legyen $c(uv)$ azon $\mathcal{E}$-beli hiperélek száma, melyek mind u-t, mind v-t tartalmazzák. Legyen F maximális súlyú feszítő fa a V csúcshalmazú teljes gráfban. Igazolható, hogy H pontosan akkor részfa hipergráf, ha minden hiperéle ezen F fának egy részfáját feszíti.

1.2.2. Fenyők

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, amelynek egy adott s pontjából minden más pontja elérhető irányított úton, azaz D tartalmaz feszítő s-fenyőt. (A következőkben s-fenyőn mindig feszítő fenyőt értünk.) Adott az éleken egy $c : E \to \mathbf{R}_+$ nemnegatív költségfüggvény. Keressünk minimális összköltségű (legolcsóbb) s-fenyőt. Ez a probléma azért is érdekes, mert könnyen kimutathatóan mind a legolcsóbb utak, mind a legolcsóbb fák problémáját magában foglalja.

Az első megoldó algoritmus Chu és Liu [4] eredménye 1965-ből. Feltehetjük, nincs s-be lépő él, mert egy ilyen él soha sincs s-fenyőben. Ha egy s-től különböző v pontba belépő valamennyi él költségét ugyanazzal az α számmal csökkentjük, akkor minden s-fenyő költsége α-val csökken. Emiatt feltehető, hogy minden s-től különböző pontba lép be 0 költségű él, röviden 0-él. Ha a 0-élek D_0 részgráfja tartalmaz s-fenyőt, akkor ennek 0 összköltsége c nemnegativitása folytán nyilván minimális. A megoldandó eset tehát az, amikor D_0 nem tartalmaz s-fenyőt. A kulcs megfigyelés a következő.

1.2.4. állítás. *D_0 tartalmaz C irányított kört. A C 0-költségű kört egy ponttá összehúzva az s-fenyők költségének minimuma nem változik.*

Ez alapján elegendő meghatározni az összehúzott D' digráfnak egy minimális költségű s-fenyőjét, és e meggondolásokat rekurzívan alkalmazva D egy minimális költségű s-fenyője polinom időben kiszámítható.

Természetesen vetődik fel, hogy létezik-e a minimális költségű fenyőkre vonatkozó olyan jellegű min-max tétel, mint amilyen Duffin tétele a legolcsóbb utakról? A választ Fulkerson [26] alábbi tétele adja meg, melynek bizonyítása az 1.2.4. állítás felhasználásával könnyen megadható.

1.2.5. tétel (Fulkerson, 1974). *Az s-fenyők minimális költsége egyenlő a*

$$\max\Big\{\sum\big[z(X) : X \subseteq V - s\big] : z \text{ } c\text{-megengedett}\Big\}$$

értékkel. Ráadásul, ha c egészértékű, akkor az optimális z is választható egészértékűnek. Van olyan optimális z, amelyre az $\{X : z(X) > 0\}$ halmazrendszer lamináris.

1.3. Páros gráfok maximális párosításai

Mikor létezik egy páros gráfban teljes párosítás, illetve, ha nem létezik, mekkora a legnagyobb? Az élsúlyozott esetben maximális súlyú teljes párosítás megkeresésére törekszünk (ez a hozzárendelési feladat), de egyéb változatok is érdekesek: érdeklődhetünk maximális súlyú párosítás vagy maximális súlyú k élű párosítás megkeresése iránt.

1.3.1. Maximális elemszámú párosítások

A súlyozatlan eset kiindulási eredménye Kőnig Dénes alapvető tétele.

1.3.1. tétel (Kőnig, 1931). *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban a diszjunkt élek maximális $\nu = \nu(G)$ száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális $\tau = \tau(G)$ elemszámával.*

Definiáljuk egy $X \subseteq S$ halmaz **hiány**át a $h(X) := |X| - \big|\Gamma(X)\big|$ értékkel, ahol $\Gamma(X)$ jelöli az X szomszédainak halmazát, vagyis $\Gamma(X) := \big\{v \in T\text{: létezik } uv \in E \text{ él, melyre } u \in X\big\}$.

1.3.2. tétel (Kőnig–Ore). *A $G = (S, T; E)$ páros gráfban egy párosítás által fedetlenül hagyott S-beli pontok minimális száma egyenlő az S részhalmazainak maximális hiányával.* **(Kőnig–Hall)** Speciálisan, akkor és csak akkor létezik S-t fedő párosítás, ha nincs hiányos halmaz, azaz teljesül a Hall-féle feltétel:

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \text{ minden } X \subseteq S \text{ részhalmazra.} \quad (1.3)$$ ∎

A Kőnig-tételből egyszerű konstrukció segítségével levezethető Dilworth [7] klasszikus eredménye.

1.3.3. tétel (Dilworth, 1955). *Egy részbenrendezett halmazban az elemeket fedő láncok minimális száma egyenlő a legnagyobb antilánc elemszámával.*

1.3.2. Maximális súlyú párosítások

A $G = (S, T; E)$ páros gráf élein legyen adott egy c nemnegatív, egészértékű súlyfüggvény. Tegyük fel, hogy G-nek létezik teljes párosítása, és vizsgáljuk meg a maximális súlyú teljes párosítás megkeresésének kérdését. Az élek lefogásának általánosításaként nevezzünk egy pontokon értelmezett π függvényt **súlyozott lefogás**nak, ha minden uv élre $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$. A π súlyozott lefogás $\pi(V)$ **összértékén** a $\sum [\pi(v) : v \in V]$ összeget értjük, ahol $V = S \cup T$.

1.3.4. tétel (Egerváry, 1931). *A $G = (S, T; E)$ teljes párosítással rendelkező páros gráfban a $c \geq 0$ egészértékű súlyfüggvényre vonatkozó maximális súlyú teljes párosítás ν_c súlya egyenlő az egészértékű súlyozott lefogások minimális τ_c összértékével. Amennyiben G teljes páros gráf, úgy az optimális súlyozott lefogás választható nemnegatívnak is.*

Ebből egyszerű fogással levezethető a maximális súlyú (nem feltétlenül teljes) párosításra vonatkozó tétel.

1.3.5. tétel. *Egy $G' = (S', T'; E')$ páros gráfban nemnegatív, egészértékű c súlyfüggvény esetén a párosítások maximális ν'_c súlya egyenlő a nemnegatív* (!) *egészértékű súlyozott lefogások minimális τ'_c értékével.*

1.4. Diszjunkt utak, k-összefüggés

(Di)gráfok magasabb összefüggőségével kapcsolatos alapvető kérdés, hogy mikor létezik k élidegen (pont-idegen) st-út. A $H = (V, F)$ (di)gráfban jelölje a (páronként) élidegen utak st-utak maximális számát $\lambda(s, t) = \lambda(s, t; H)$, míg a belsőleg pontidegen utakét $\kappa(s, t) = \kappa(s, t; H)$. Ezekre vonatkozik Menger tétele, amelynek különféle változatai ismeretesek, annak megfelelően, hogy élidegen vagy pontidegen utakat keresünk irányított vagy irányítatlan gráfban. Az irányítatlan pont-változat származik Mengertől, a többit először Gallai fogalmazta meg és igazolta. Az irányított él-változatból a többi verzió könnyen adódik.

1.4.1. tétel (él-Menger). *Egy irányított* (irányítatlan) *gráfban akkor és csak akkor vezet s-ből t-be $k \geq 1$ élidegen út, ha minden S $s\bar{t}$-halmaz kifoka* (foka) *legalább k.*

1.4.2. tétel (pont-Menger). *Egy* (irányított) *gráfban, amelyben nincs él s-ből t-be, akkor és csak akkor létezik s-ből t-be k belsőleg diszjunkt* (irányított) *út, ha az* (irányított) *st-utakat nem lehet k-nál kevesebb $V - \{s, t\}$-beli ponttal lefogni.*

A Menger tételek megfelelő változatából viszonylag könnyen adódnak az alábbi jellemzések.

1.4.3. tétel. (a) *Egy $H = (V, F)$ irányított vagy irányítatlan gráf akkor és csak akkor k-élösszefüggő, ha bármely pontjából bármely másikba vezet k élidegen út, azaz $\lambda(u, v) \geq k$ minden $u, v \in V$-re.* (b) *H akkor és csak akkor k-összefüggő, ha $|V| \geq k + 1$ és $\kappa(u, v) \geq k$ minden $u, v \in V$-re.* (c) *A $D = (V, A)$ digráf egy kijelölt s csúcsára nézve akkor és csak akkor gyökeresen k-élösszefüggő* (gyökeresen k-pont-összefüggő), *ha $\lambda(s, v) \geq k$* (illetve $\kappa(s, v) \geq k$) *minden $v \in V$-re.*

Kérdés, hogy algoritmikusan miként lehet a $D = (V, A)$ digráfban s-ből t-be k élidegen utat találni, illetve ha nincs megoldás, miként határozható meg az él-Menger tétel által biztosított k-nál kisebb kifokú S halmaz.

A megoldás ötlete az, hogy D-ben a k élidegen utat nem közvetlenül próbáljuk megtalálni, hanem egy olyan $D' = (V, A')$ részgráf megkeresésére törekszünk, amelyben minden $v \in V - \{s, t\}$ csúcsra $(*)$ $\varrho'(v) = \delta'(v)$, továbbá $\delta'(s) = k$ és $\delta'(t) = 0$. Nyilván k élidegen st-út egyesítése ilyen részgráfot alkot, és megfordítva, egy ilyen részgráfban mindig létezik k élidegen st-út. Valóban, induljunk ki s-ből, és amíg csak lehetséges haladjunk tovább addig még nem használt élek mentén. A fokszámokra tett feltételek miatt csak t-ben akadunk el. Így megtalálunk egy st-sétát, amelyből az esetleges köröket kihagyva egy P_1 st-utat nyerünk. Mivel a P_1 éleinek elhagyásával keletkező digráfra $(*)$ továbbra is fennáll, az eljárást $k = \delta(s)$-szer ismételve megkapjuk a keresett k élidegen st-utat.

Az olyan A' részgráfot (és az incidencia vektorát is, amelyben egy e élre $x(e)$ annak megfelelően 1 vagy 0, hogy e benne van-e A'-ben), amely felbomlik k élidegen st-útra és körök uniójára a jelen munkában k-**fonat**nak fogjuk nevezni. Ennek általánosítása a folyam.

1.5. Folyamok és áramok

Legyen a $D = (V, A)$ digráfnak kijelölve egy s forráspontja és egy t nyelőpontja, melyekre $\varrho_D(s) = \delta_D(t) = 0$. **Folyam**on egy olyan nemnegatív $x : A \to R_+$ vektort értünk, amely minden, s-től és t-től különböző pontra teljesíti a **megmaradási szabály**t, azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden $v \in V - \{s, t\}$ csúcsra. Amennyiben még az $x \leq g$ feltétel is teljesül egy nemnegatív $g : A \to \mathbf{R}_+$ kapacitásfüggvényre nézve, úgy **megengedett folyam**ról beszélünk. A $\delta_x(s)$ értéket nevezzük az x folyam **nagyság**ának. Alkalmazásokban gyakran felbukkanó rokon fogalom az áramé, ahol nincsenek kitüntetett csúcsok. Egy $x : A \to \mathbf{R}$ függvényt **áram**nak (circulation) nevezünk, ha minden csúcsban teljesül a megmaradási szabály.

1.5.1. Maximális folyamok

Az $x(uv)$ szám a folyam **értéke** az $uv \in A$ élen. A fő kérdés, hogy miként lehet meghatározni a maximális nagyságú (röviden maximális) egészértékű folyamot. A k élidegen st-út megkeresésének feladata tehát egy egészértékű k nagyságú, a $g \equiv 1$ kapacitásfüggvényre nézve megengedett folyam megkeresésével ekvivalens.

Alapvető az alábbi, L. R. Fordtól és D. R. Fulkersontól származó Maximális-Folyam Minimális-Vágás tétel (Max-Flow Min-Cut; MFMC), amely az irányított él-Menger tétel általánosításának tekinthető.

1.5.1. tétel (Maximális-Folyam Minimális-Vágás). *A $D = (V, A)$ irányított gráfban akkor és csak akkor létezik a g kapacitásra vontakozó k nagyságú megengedett folyam, ha minden S $s\bar{t}$-halmazra $\delta_g(S) \geq k$. Ha e feltétel teljesül, g egészértékű és k egész, úgy a folyam is választható egészértékűnek.*

A tételt néha az alábbi ekvivalens alakban említik.

1.5.2. tétel. *A megengedett st-folyamok maximális nagysága egyenlő a $\delta_g(S)$ értékek minimumával, ahol a minimum az összes $s\bar{t}$-halmazra megy. Ha g egészértékű, úgy a maximum egészértékű folyamon is felvétetik.*

A tétel konstruktív bizonyítása a jól ismert Ford–Fulkerson féle javító utas módszerrel történik, legalábbis amikor g egészértékű vagy racionális. Az általános esetben legrövidebb javító utak használatával érhetünk célt, amint ezt Edmonds és Karp, illetve Dinits kimutatták. Ez erősen polinomiális futásidejű algoritmust szolgáltat.

1.5.2. Megengedett áramok

Valamely $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvényre vonatkozólag az x áram költségén a cx skalárszorzatot értjük.

Legyen $f : A \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ alsó kapacitás, $g : A \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ felső kapacitás úgy, hogy $f \leq g$. Azt mondjuk hogy az x áram **megengedett,** ha $f \leq x \leq g$. Kérdés, hogy mikor létezik (egészértékű) megengedett áram, és ha létezik, miképp lehet meghatározni egy minimális költségűt. Ennek segítségével oldható meg például az ún. irányított kínai postás probléma, amelyben egy erősen összefüggő irányított gráf éleit kell minimális költséggel úgy bejárni, hogy minden élen legalább egyszer végighaladunk. Ha $z(e)$ jelöli egy ilyen bejárásban azt, hogy az e élen hányszor megyünk végig, akkor z teljesíti a megmaradási szabályt, hiszen minden csúcsba ugyanannyiszor lépünk be, mint ahányszor onnan ki. A feladat tehát a legolcsóbb (egészértékű) áram meghatározásával ekvivalens, amely minden élen legalább egy. Megfogalmazzuk az áramokra vonatkozó két alaptételt: az egyik a megengedett áramok létezéséről szól, a másik pedig a legolcsóbb megengedett áram költségéről.

1.5.3. tétel (Hoffman, 1960). *A $D = (V, A)$ digráfban adott $f \leq g$ kapacitásfüggvényekre vonatkozólag akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$\varrho_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{1.4}$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek és (1.4) fennáll, úgy létezik egészértékű megengedett áram is.

A minimális költségű megengedett áramra vonatkozó tételt csak a ciklusokra vonatkozó speciális esetben mondjuk ki (amelyből az általános eset is kiolvasható). **Ciklus**on egy Euler-féle részgráfot, illetve annak karakterisztikus vektorát értünk, röviden egy $0-1$ értékű áramot. A ciklusok pontosan az élidegen körök egyesítéseként előálló részgráfok.

1.5.4. tétel. *A $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán adott a $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvény. A legolcsóbb ciklus költsége egyenlő a*

$$\sum \left[c_\pi(uv) : uv \in A,\ c_\pi(uv) < 0\right] \tag{1.5}$$

érték maximumával, ahol $c_\pi(uv) := c(uv) - \pi(v) + \pi(v)$ és a maximum az összes $\pi : V \to \mathbf{R}$ potenciálra megy. Amennyiben c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek. Egy $F \subseteq A$ ciklus akkor és csak akkor minimális költségű, ha létezik olyan π potenciál, amelyre $c_\pi(e) < 0$ esetén $e \in F$, míg $c_\pi(e) > 0$ esetén $e \in A - F$.

A maximális folyam, illetve minimális vágás meghatározására szolgáló algoritmus segítségével el lehet dönteni, hogy teljesül-e (1.4), és ha igen, akkor tudunk találni megengedett áramot. Hasonlóképp, a minimális költségű folyam feladatra vonatkozó algoritmus segítségével megoldható a minimális költségű megengedett áram problémája is. Speciálisan, a k-fonatokra vonatkozó algoritmusra támaszkodva rendelkezésre áll egy erősen polinomiális algoritmus legolcsóbb ciklus kiszámítására. Az általános kapacitásokra esetén a minimális költségű áram vagy folyam problémára az első erősen polinomiális algoritmus Tardos Éva [50] nevéhez fűződik. Ez az eljárás jóval összetettebb, mint Ford és Fulkerson most következő algoritmusa, amely azonosan 1 kapacitások esetén ugyan polinomiális, de az általános esetben nem.

1.5.3. Minimális költségű folyamok és fonatok

Folyamok segítségével tehát hatékonyan lehet egy $D = (V, A)$ digráfban k élidegen st-utat azaz egy k-fonatot keresni, míg Dijkstra algoritmusa egyetlen legolcsóbb st-út kiszámítására nyújt lehetőséget. Megannyi gyakorlati feladatban bukkan fel az igény a kétféle probléma ötvözésére. Vagyis, adott $c : A \to \mathbf{R}_+$ költségfüggvény esetén hogyan lehet meghatározni k élidegen st-utat, melyek összköltsége minimális? Ehhez nemnegatív költségfüggvény esetén egy minimális költségű k-fonatot kell kiszámolnunk, azaz egy k nagyságú megengedett egészértékű folyamot a $g \equiv 1$ kapacitásfüggvényre vonatkozóan. Valójában az alábbi algoritmus általános g kapacitásfüggvényre is kiterjeszthető, de egyszerűség kedvéért, és amiatt, hogy az élidegen utakhoz amúgy is csak erre a speciális esetre van szükség feltesszük, hogy $g \equiv 1$. Az algoritmus, amely a Magyar Módszer kiterjesztésének tekinthető további általánosítások kiinduló pontja. Nemes eleganciája lenyűgöző.

Minden 0 és M közé eső k egészre szeretnénk találni egy olyan k-fonatot, melynek költsége a k-fonatok közt minimális. Egy z fonat **költségét** a $cz = \sum [c(e)z(e) : e \in A]$ skaláris szorzattal definiáljuk. Van egy speciális költségfüggvény osztály, amelyre a feladat egyszerűen megválaszolható, és ez segít az általános eset megértéséhez is. Legyen $\pi : V \to \mathbf{Z}_+$ olyan függvény a V-n, amelyre $\pi(s) = 0 \leq \pi(v) \leq \pi(t)$ minden $v \in V$-re. Egy ilyen függvényt **potenciál**nak hívunk. Definiáljuk a $\Delta_\pi : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvényt a következőképpen

$$\Delta_\pi(uv) := \pi(v) - \pi(u), \tag{1.6}$$

és nevezzük Δ_π-t **pontindukált** költségfüggvénynek. Ennek lehetnek ugyan negatív értékei is, de az bizonyos, hogy konzervatív, hiszen minden kör költsége nulla. Miután egy st-út Δ_π-költsége $\pi(t) - \pi(s) = \pi(t)$, kapjuk, hogy a Δ_π pontindukált költségfüggvényre vonatkozólag minden k-fonatnak ugyanaz a költsége, éspedig $k\pi(t)$. Emiatt egy pontindukált költségfüggvénnyel eltolva c-t, az eredetivel ekvivalens feladathoz jutunk, más szóval az $uv \in A$ élekre a

$$c_\pi(uv) := c(uv) - \Delta_\pi(uv) \tag{1.7}$$

jelölést használva azt kapjuk, hogy a legolcsóbb k-fonat meghatározása szempontjából c és c_π ekvivalens. A következő tétel az általános esetre vonatkozik.

1.5.5. tétel (Ford és Fulkerson). *A $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán adott a $c : A \to \mathbf{R}_+$ költségfüggvény. A k-fonatok minimális költsége* (vagyis k élidegen st-út összköltségének a minimuma) *egyenlő a*

$$k\pi(t) + \sum \left[c_\pi(uv) : uv \in A,\ c_\pi(uv) < 0\right] \tag{1.8}$$

érték maximumával, ahol a maximum az összes $\pi : V \to \mathbf{R}_+$ potenciálra megy. Egy z k-fonat akkor és csak akkor minimális költségű a k-fonatok között, ha létezik olyan π potenciál, amelyre fennállnak a következő optimalitási feltételek:

$$c_\pi(uv) > 0 \Rightarrow z(uv) = 0, \tag{i}$$

$$c_\pi(uv) < 0 \Rightarrow z(uv) = 1. \tag{ii}$$

Amennyiben c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.

Bizonyítás. Potenciálok segítségével egy z fonat cz költségére az alábbi alsó korlátot nyerhetjük.

$$\sum c(uv)z(uv) = \sum \Delta_\pi(uv)z(uv) + \sum c_\pi(uv)z(uv) =$$

$$= k\pi(t) + \sum \left[c_\pi(uv)z(uv) : c_\pi(uv) > 0\right] + \sum \left[c_\pi(uv)z(uv) : c_\pi(uv) < 0\right] \geq$$

$$\geq k\pi(t) + 0 + \sum \left[c_\pi(uv) : c_\pi(uv) < 0\right].$$

Ebből egyrészt következik a min $\geq$ max egyenlőtlenség, másrészt az, hogy egy k-fonat bizonyosan minimális költségű a k-fonatok között, ha létezik hozzá olyan

π potenciál, amelyre a fenti becslésben minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, ami viszont pont azzal ekvivalens, hogy fennállnak a tételben megadott (i) és (ii) optimalitási feltételek. Emiatt a tétel mindkét része következik, ha kimutatjuk, hogy minden lehetséges egész k értékre létezik egy k-fonat és egy ehhez tartozó π potenciál (amely egészértékű, ha c az), melyek kielégítik az optimalitási feltételeket. Ezeket konstruálja meg Ford és Fulkerson minimál-költséges folyam algoritmusa, amely a maximális nagyságú folyam kiszámítására vonatkozó növelő utas eljárás finomítása.

Az eljárás a $z \equiv 0$ 0-fonattal és az azonosan nulla π potenciállal indul. Ezután a folyam nagyságát növeljük egyenként, illetve menetközben néha a potenciált növeljük úgy, hogy az optimalitási feltételek végig fennállnak. Az algoritmus akkor ér véget, amikor maximális nagyságú folyamot, illetve egy minimális vágást kaptunk. Az algoritmus végig megőrzi az aktuális folyam egészértékűségét és amennyiben c egészértékű, úgy az aktuális potenciálét is.

ITERATÍV LÉPÉS. Az általános helyzetben adott a z fonat és a π potenciál, és ezek kielégítik az (i) és (ii) feltételeket. Megkonstruálunk egy $D' = (V, A')$ segédgráfot a következőképpen. D'-nek kétféle éle van: előre és hátra. Egy $uv \in A'$ él **előre-él,** ha $uv \in A$, $c_\pi(uv) = 0$ és $z(uv) = 0$. Egy $uv \in A'$ él **hátra-él,** ha $vu \in A$, $c_\pi(vu) = 0$ és $z(vu) = 1$. Legyen S az s-ből D'-ben irányított úton elérhető pontok halmaza. Két eset lehetséges.

1. Eset. *$t \notin S$, azaz t nem elérhető s-ből.*

Legyen

$$\varepsilon_1 = \min\{c_\pi(uv) : uv \in A,\ u \in S,\ v \in V - S,\ z(uv) = 0\}$$

és

$$\varepsilon_2 = \min\{-c_\pi(uv) : uv \in A,\ u \in V - S,\ v \in S,\ z(uv) = 1\},$$

ahol az üres halmazon vett minimumot ∞-nek definiáljuk. Legyen $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Az optimalitási feltételek és az S definíciója miatt ε pozitív.

Amennyiben $\varepsilon = \infty$, akkor az algoritmus végetér. Ebben az esetben az S-ből kilépő eredeti élek mind telítettek, míg az S-be belépő eredeti élek mindegyikén a folyam nulla. Így $\delta(S) = \delta_z(S) - \varrho_z(S) = \delta_z(s)$, vagyis az aktuális z folyam maximális nagyságú és az S-ből kilépő élek halmaza minimális vágást határoz meg.

Legyen most $\varepsilon < \infty$, és módosítsuk π-t úgy, hogy minden $v \in V - S$-re növeljük $\pi(v)$-t ε-nal. Az S és az ε definíciójából rögtön kapjuk:

1.5.6. állítás. *A módosított potenciál és a változatlanul hagyott fonat kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Készítsük el az új segédgráfot és ismételjük meg az eljárást. Figyeljük meg, hogy a segédgráfban a (régi) S által feszített élek változatlanok maradnak és legalább egy S-ből kilépő új él keletkezik az ε választása folytán. Emiatt az új segédgráfban az s-ből elért pontok halmaza szigorúan bővebb lesz, mint S. Ezért az 1. eset legfeljebb $(|V|-1)$-szeri előfordulását követően bizonyosan vagy az $\varepsilon = \infty$ következik be, vagy pedig az alábbi 2. eset.

2. Eset. *$t \in S$, vagyis t elérhető s-ből.* Legyen P a D'-ben egy s-ből t-be vezető irányított út. Módosítsuk z-t a következőképpen. Legyen $z'(uv) = 1$, ha uv a P-nek előre-éle és legyen $z'(uv) = 0$, ha vu a P-nek hátra-éle.

A módosításból adódik:

1.5.7. állítás. *A módosított fonat és a változatlanul hagyott potenciál kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Az algoritmus leírását befejeztük, és ezzel a tétel bizonyítása is teljes, hiszen az eljárás véges sok lépés után minden lehetséges k-ra megad egy k-fonatot és egy potenciált, melyek teljesítik az optimalitási feltételeket. Miután összesen $M \leq |A|$ folyamnövelésre kerül sor és két folyamnövelés között legfeljebb $|V| - 1$ potenciál változtatásra, a fenti algoritmus polinomiális futásidejű. ■

1.5.4. Részbenrendezett halmazok láncai és antiláncai

Az 1.3.1. szakaszban már említettük, hogy Dilworth tétele könnyen levezethető a Kőnig tételből, aminek az az előnye is megvan, hogy az alternáló utas módszer algorimust ad a minimális láncfelbontás és a legnagyobb antilánc meghatározására. A fenti Ford–Fulkerson algoritmus szép alkalmazásaként a Dilworth tétel alábbi, nagymérvű általánosítása is algoritmikusan kezelhetővé válik.

Legyen $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ részbenrendezett halmaz. Egy lánc elemszámát néha a lánc **hosszának** nevezik. A leghosszabb lánc hossza a részbenrendezett halmaz **magassága.** A legnagyobb antilánc elemszáma részbenrendezett halmaz **szélessége.** Ezekre vonatkozik a Dilworth tétel [7] és a Dilworth tétel polárisa.

1.5.8. tétel (Dilworth, 1955). *A P-t fedő láncok minimális $a = a(P)$ száma egyenlő a legnagyobb antilánc elemszámával, vagyis P szélességével.*

1.5.9. tétel (poláris Dilworth). *A P-t fedő antiláncok minimális $c = c(P)$ száma egyenlő a leghosszabb lánc hosszával, vagyis P magasságával.*

A Dilworth tétel kitejesztéseként megvizsgáljuk, hogy $\alpha \geq 1$ antilánc egyesítése maximum milyen nagy lehet, a polár Dilworth tétel kitejesztéseként pedig azt, hogy $\gamma \geq 1$ lánc egyesítése maximum milyen nagy lehet. Valamely $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ családra használjuk az $\cup\mathcal{B} = \cup[B_i : i = 1, \ldots, k]$ jelölést. A $\mathcal{C}_\gamma = \{C_1, C_2, \ldots, C_\gamma\}$ **lánc-család**on γ darab diszjunkt nemüres láncból álló halmazt értünk. Jelölje $\mathbf{C}_\gamma$ a γ láncból álló lánc-családok halmazát, míg $\mathbf{C}$ az összes lánc-családot magába foglaló halmazt. Legyen $c_\gamma = \max\{|\cup\mathcal{C}_\gamma| : \mathcal{C} \in \mathbf{C}_\gamma\}$, vagyis c_γ a legnagyobb részhalmaz elemszáma, amely előáll γ lánc egyesítéseként (azaz a Dilworth tétel alapján nem tartalmaz γ-nál nagyobb elemszámú antiláncot).

Az $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \ldots, A_\alpha\}$ **antilánc-családon** α darab diszjunkt nemüres antiláncból álló halmazt értünk. Jelölje $\mathbf{A}_\alpha$ az α antiláncból álló antilánc-családok halmazát, míg $\mathbf{A}$ az összes antilánc-családot magában foglaló halmazt. Legyen $a_\alpha = \max\{|\cup \mathcal{A}_\alpha| : \mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha\}$, vagyis a_α a legnagyobb olyan halmaz elemszáma, amely előáll α antilánc egyesítéseként (azaz a poláris Dilworth tétel alapján nem tartalmaz α-nál nagyobb elemszámú láncot).

Dilworth tétele szerint $c_a = n$, a poláris Dilworth tétel szerint $a_c = n$. Mi mondható c_γ-ról $(1 \le \gamma \le a)$ és a_α-ról $(1 \le \alpha \le c)$?

1.5.10. tétel (Greene és Kleitman, 1976). $a_\alpha = \min\{q\alpha + |P - \cup\mathcal{C}_q| : \mathcal{C}_q \in \mathbf{C}\}$.

1.5.11. tétel (Greene, 1976). $c_\gamma = \min\{q\gamma + |P - \cup\mathcal{A}_q| : \mathcal{A}_q \in \mathbf{A}\}$.

Miután egy láncnak és egy antiláncnak legfeljebb egy közös eleme lehet, a_α és c_γ legfeljebb akkora, mint a szóbanforgó minimum.

Definíció. Az $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \ldots, A_\alpha)$ antilánc-család és a $\mathcal{C}_\gamma = \{C_1, C_2, \ldots, C_\gamma\}$ lánc-család **ortogonális,** ha

$$P = (\cup\mathcal{A}_\alpha) \cup (\cup\mathcal{C}_\gamma) \tag{1.9}$$

és

$$A_i \cap C_j \neq \emptyset \quad \text{hacsak} \quad 1 \le i \le \alpha,\ 1 \le j \le \gamma, \tag{1.10}$$

azaz a lánc-család és az antilánc-család együttesen lefedi P-t és mindegyik A_i antilánc metszi az összes C_j láncot.

Az 1.5.10. és 1.5.11. tételek nemtriviális részeit átfogalmazhatjuk az alábbiak szerint.

1.5.12. tétel. *Minden α-ra, $1 \le \alpha \le c$, létezik $\mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha$ és valamely $\gamma \ge 1$ egészre $\mathcal{C}_\gamma \in \mathbf{C}$, amelyek ortogonálisak.*

1.5.13. tétel. *Minden γ-ra, $1 \le \gamma \le a$, létezik $\mathcal{C}_\gamma \in \mathbf{C}_\gamma$ és valamely $\alpha \ge 1$ egészre $\mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}$, melyek ortogonálisak.*

Az 1.5.12 és 1.5.13. tételeknek létezik egy közös általánosítása, amelynek külön érdekességet ad, hogy a bizonyítása a fentebb vázolt Ford–Fulkerson féle minimális költségű folyam algoritmus futásának elemzésén alapult.

1.5.14. tétel [18]. *A $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ részbenrendezett halmaz szélessége legyen $a = a(P)$, magassága $c = c(P)$. Létezik egy olyan $\mathcal{C}_a \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{i_1} \mid \mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_1} \mid \mathcal{A}_{i_1+1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_2} \mid \mathcal{C}_{a-j_1-1}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_2} \mid \ldots$ sorozat, amely a $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_{a-1}, \ldots, \mathcal{C}_1$ és az $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_c$ sorozatok összefésülésével keletkezik, ahol $\mathcal{C}_j \in \mathbf{C}_j$ és $\mathcal{A}_i \in \mathbf{A}_i$, és a sorozat bármely tagjára* (akár $\mathcal{C}_j$, akár $\mathcal{A}_i$) *fennáll, hogy ortogonális az utolsó őt megelőző ellentétes típusú tagra.* (Vagyis, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{i_1}$ ortogonális $\mathcal{C}_a$-ra, $\mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_1}$ mindegyike ortogonális $\mathcal{A}_{i_1}$-re, stb.)

A tételből kiolvasható az alábbi érdekes következmény, amelynek megfogalmazásához egy maximális (azaz a elemszámú) antiláncot **D-antiláncnak** nevezünk.

1.5.15. következmény. *A diszjunkt D-antiláncok maximális száma egyenlő a D-antiláncokat lefogó elemek minimális számával.*

2. Leemelés és kikeresztezés

Átmenetként a kombinatorikus optimalizálás újabb keletű részei felé, bemutatunk két olyan alapvető bizonyítási technikát, melyek megannyi alkalmazásban megkerülhetetlennek bizonyulnak. Mindkét idea Lovász Lászlótól származik.

2.1. Leemelés (di)gráfokban

Legyen $H = (U, F)$ irányítatlan gráfnak $e = zu$ és $f = zv$ két szomszédos éle. Azt mondjuk, hogy a $H^{ef} = \big(U, F - \{e, f\} + uv\big)$ gráf a H-ból az e és f élek leemelésével keletkezett. Analóg módon definiálhatjuk a leemelést egy $H = (U, F)$ irányított gráfban is: legyenek $e = uz$ és $f = zv$ irányított élek, ekkor definíció szerint $H^{ef} = \big(U, F - \{e, f\} + uv\big)$. Könnyen látszik, hogy mind az irányított, mind az irányítatlan esetben $\lambda(x, y; H) \geq \lambda(x, y; H^{ef})$ minden x, y pontpárra fennáll, (ahol $\lambda(x, y)$ az irányítatlan esetben az x és y között vezető élidegen utak maximális számát jelöli, míg az irányítottban az x-ből y-ba vezetőkét). Leemeléssel tehát az élösszefüggőség biztosan nem nő. Kérdés, hogy mikor nem csökken. Természetesen a z pontnál a fokszám csökken, így csak a (di)gráf z-től különböző pontjai közötti élösszefüggés fenntartása lehet a célunk.

2.1.1. Irányítatlan leemelés

Irányítatlan gráfokra a választ Lovásznak [39] (6.53 feladat) következő alapvető eredménye adja meg.

2.1.1. lemma (Lovász leemelési lemmája, 1979). *A $G = (V + z, E)$ irányítatlan gráfban a kijelölt z pont $d(z)$ foka legyen pozitív és páros. Legyen $k \geq 2$ egész és tegyük fel, hogy*

$$\lambda(x, y; G) \geq k \quad \textit{minden } x, y \in V \textit{ pontpárra.} \tag{2.1}$$

Ekkor minden $e = zt$ élhez létezik olyan $f = zv$ él, amelyekre $\lambda(x, y; G^{ef}) \geq k$ minden $x, y \in V$ pontpárra.

Bizonyítás. Menger tétele alapján a (2.1) feltevés azzal ekvivalens, hogy

$$d(X) \geq k \quad \text{minden } \emptyset \neq X \subset V \text{ részhalmazra,} \tag{2.2}$$

ahol $d(X)$ jelöli az X halmaz fokszámát. Ha leemeléskor egy halmaznak csökken a fokszáma, akkor 2-vel csökken. Egy $X \subset V$ részhalmazt nevezzünk **veszélyes**nek, ha $d(X) \leq k + 1$.

Legyen S az z szomszédainak halmaza. Egy $f = zv$ él akkor nem emelhető le az adott $e = zt$ éllel, ha v benne van egy t pontot tartalmazó veszélyes halmazban. Indirekt tegyük fel, hogy S lefedhető t-t tartalmazó veszélyes halmazokkal, és legyen $\mathcal{F}$ a t pontot tartalmazó maximális (azaz nem bővíthető) veszélyes halmazoknak egy S-t fedő rendszere, melyre $|\mathcal{F}|$ minimális.

$\mathcal{F}$ nem lehet egytagú, mert ha X olyan veszélyes halmaz, melyre $S \supset X$, akkor $d(V - X) = d(X) - d(z) \leq (k + 1) - 2 = k - 1$, ami ellentmondana (2.2)-nek.

Az sem lehet, hogy $\mathcal{F} = \{X, Y\}$. Ekkor ugyanis $k + 1 + k + 1 \geq d(X) + d(Y) = d(X - Y) + d(Y - X) + 2\bar{d}(X, Y) \geq k + k + 2$, amiből az adódik, hogy z-ből egyetlen él megy $X \cap Y$-ba. Az $\alpha := d(z, X - Y)$ és $\beta := d(z, Y - x)$ jelölést használva azt kapjuk, hogy $d(z) = 1 + \alpha + \beta$. Miután $d(z)$ páros, $\alpha \neq \beta$. Legyen mondjuk $\alpha > \beta$. De ekkor $d(V - X) = d(X + z) = d(X) - (\alpha + 1) + \beta \leq d(X) - 2 \leq (k + 1) - 2 \leq k - 1$, vagyis $V - X$ megsérti (2.2)-t.

Végül Lovász hármas egyenlőtlensége segítségével kimutatjuk, hogy $|\mathcal{F}| \geq 3$ sem lehetséges.

2.1.2. állítás. *Egy irányítatlan gráfban, melynek ponthalmaza U, bármely A, B, $C \subseteq U$ halmazra fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$d(A) + d(B) + d(C) \geq$$

$$\geq d(A \cap B \cap C) + d(A - (B \cup C)) + d(B - (A \cup C)) + d(C - (A \cup B)) +$$

$$+ 2d(A \cap B \cap C, U - (A \cup B \cup C)).$$

Bizonyítás. Az egyenlőtlenséget elég egyélű gráfokra igazolni. Ilyenekre pedig az egyenlőtlenség az él elhelyezkedésétől függő egyszerű esetszétválasztással ellenőrizhető. ■

Legyen tehát A, B, C az $\mathcal{F}$ három tagja. Az állítás alapján $3(k + 1) \geq d(A) + d(B) + d(C) \geq d(A \cap B \cap C) + d(A - (B \cup C)) + d(B - (A \cup C)) + d(C - (A \cup B)) + 2d(A \cap B \cap C, U - (A \cup B \cup B)) \geq k + k + k + k + 2$, ami ellentmond a $k \geq 2$ feltevésnek. ■ ■

A négyélű csillag ($K_{4,1}$) mutatja, hogy a leemelési lemma $k = 1$-re nem érvényes. A teljes négyes (K_4) pedig arra példa, hogy a $d(z)$ párosságára tett kikötés sem hagyható ki. A 2.1.1. tétel ismételt alkalmazásával rögtön következik az alábbi.

2.1.3. tétel (Lovász, 1979). *Legyen a $G = (V + z, E)$ irányítatlan gráfban a z pont $d(z)$ foka pozitív és páros, és tegyük fel, hogy $k \geq 2$ egészre (2.1) fennáll. Ekkor a z-vel szomszédos élek párba állíthatók úgy, hogy a párok egyszerre történő leemelésével kapott $G' = (V, E')$ gráf k-élösszefüggő.* ■

2.1.2. Irányított leemelés

A Lovász-féle leemelési tétel irányított ellenpárja W. Madertől származik [44]. Használni fogjuk az alábbi azonosságokat.

$$\varrho(X) + \varrho(Y) = \varrho(X \cap Y) + \varrho(X \cup Y) + d(X, Y). \tag{2.3}$$

$$\varrho(X) + \varrho(Y) = \varrho(X - Y) + \varrho(Y - X) + \bar{d}(X, Y) + \varrho(X \cap Y) - \delta(X \cap Y). \tag{2.4}$$

Azt mondjuk, hogy egy $D = (V, A)$ digráf csúcsainak egy U' részhalmazában k**-élösszefüggő**, ha bármely U'-beli pontból bármely másik U'-beli pontba vezet k élidegen út. Ez Menger tétele alapján azzal ekvivalens, hogy

$$\varrho(X) \geq k,\ \delta(X) \geq k \text{ minden } U'\text{-t elválasztó } X \subseteq V \text{ részhalmazra,} \tag{2.5}$$

ahol egy X halmazról akkor mondjuk, hogy **elválasztja** U'-t, ha $U' \cap X \neq \emptyset$, $U' - X \neq \emptyset$. (Természetesen az U' halmaz k-élösszefüggősége nem egyenértékű azzal, hogy az U' által feszített digráf k-élösszefüggő.) Az alábbiakban egy olyan $D = (U + z, A)$ digráffal fogunk dolgozni, amelynek z kitüntetett pontja.

2.1.4. lemma (Mader leemelési lemmája, 1982). *Legyen a $D = (U + z, A)$ digráf U-ban k-élösszefüggő ($k \geq 1$), és tegyük fel, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$. Ekkor minden $e = zt$ élhez létezik olyan $f = uz$ él, amelyre az $\{e, f\}$ élpár leemelésével kapott D^{ef} digráf is U-ban k-élösszefüggő.*

Bizonyítás. Egy $X \subset U$ részhalmazt nevezzünk **be-pontos**nak, ha $\varrho(X) = k$ és **ki-pontos**nak, ha $\delta(X) = k$. Az X **pontos**, ha ki-pontos vagy be-pontos.

2.1.5. állítás. *Legyen X és Y két pontos halmaz, melyek tartalmazzák a t pontot. Ekkor $X \cup Y$ is pontos.*

Bizonyítás. Készen vagyunk, ha $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$, így feltehető, hogy nem ez a helyzet. Nem lehet, hogy az egyik halmaz ki-pontos, a másik pedig be-pontos, mert ha például $\varrho(X) = k$ és $\delta(Y) = k$, akkor az $\bar{Y} := U + z - Y$ és az X halmazra $2k = \varrho(X) + \varrho(\bar{Y}) = \varrho(X \cup \bar{Y}) + \varrho(X \cap \bar{Y}) + d(X, \bar{Y}) \geq 2k + 1$ adódna.

Tegyük fel most, hogy X, Y ki-pontosak. (A bizonyítás analóg abban az esetben, ha X, Y be-pontosak). Nem lehet, hogy $X \cup Y = U$, mert különben $\bar{X} \cap \bar{Y} = \{z\}$, és ekkor felhasználva, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$, (2.4) alapján azt kapnánk, hogy $2k = \varrho(\bar{X}) + \varrho(\bar{Y}) = \varrho(\bar{X} - \bar{Y}) + \varrho(\bar{Y} - \bar{X}) + \bar{d}(\bar{X}, \bar{Y}) \geq k + k + 1$. Ha viszont $X \cup Y \subset U$, akkor (2.5) miatt $2k = \delta(X) + \delta(Y) \geq \delta(X \cap Y) + \delta(X \cup Y) \geq k + k$, amiből a lemma következik. ∎

Ha egyáltalán nincs t-t tartalmazó pontos halmaz, akkor $e = zt$-vel bármely $f = uz$ leemelhető. Ha van ilyen pontos halmaz, akkor a lemma alapján létezik egy M egyértelmű maximális t-t tartalmazó pontos halmaz. Nem lehet, hogy minden z-be lépő él M-ből jön. Ha ugyanis $\varrho(M) = k$, akkor $\delta(U - M) = \varrho(M + z) \leq \varrho(M) - 1 = k - 1$, ellentétben az (2.5) feltevéssel, ha viszont $\delta(M) = k$, akkor $\varrho(U - M) = \delta(M + z) \leq \delta(M) - \varrho(z) + \delta(z) - 1 \leq k - 1$, ismét ellentétben (2.5)-gyel. Létezik tehát olyan $f = uz$ él, amelyre $u \in U - M$ és ez e-vel leemelhető. ∎ ∎

Példán megmutatható, hogy a $\varrho(z) = \delta(z)$ kikötés nélkül a tétel már $k = 1$-re sem igaz. A 2.1.4. tétel ismételt alkalmazásával rögtön következik az alábbi.

2.1.6. tétel (Mader, 1982). *Legyen a $D = (U + z, A)$ digráf U-ban k-élösszefüggő ($k \geq 1$), és tegyük fel, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$. Ekkor a z-be belépő és z-ből kilépő élek párba állíthatók egymással úgy, hogy a párokat egyszerre leemelve k-élösszefüggő digráfot kapunk az U csúcshalmazon.*

2.2. Kikeresztezés

Szemben a leemelési művelettel, amely algoritmikus szempontból is használható, a kikeresztezési eljárás egy tipikusan nem konstruktív bizonyítási technika. A módszert a C. Lucchesi és D. Younger nevezetes tételének Lovásztól származó bizonyításával szemléltetjük.

Nevezzük a $D = (V, A)$ digráf éleinek egy F részhalmazát **irányított kötés**nek vagy röviden **kötés**nek, ha F elemeit fordítva is behúzva (és az eredetieket meghagyva) erősen összefüggő digráfot kapunk. Ez azzal ekvivalens, hogy F elemeit összehúzva erősen összefüggő digráfot kapunk, vagy még azzal is, hogy F minden egyirányú vágásnak tartalmazza legalább egy elemét. Csúcsoknak egy nemüres X részhalmazát nevezzük **mag**nak, ha nem lép ki belőle él. Az X-be belépő élek halmaza egyirányú vágást alkot, amelynek X a magja.

Keresztezés-mentes hipergráfok

Keresztezés-mentes hipergráfra egyszerű példát kapunk, ha veszünk egy F irányított fát és ennek minden e éléhez tekintjük azt a V_e halmazt, amely a fának az e elhagyásával keletkező azon komponensét jelöli, amelybe e belép. Az így keletkezett hipergráf keresztezés-mentes. Érvényes egyfajta megfordítás, melynek bizonyítása egyszerű indukcióval történhet.

2.2.1. állítás. *A V részhalmazaiból álló tetszőleges $\mathcal{F}$ keresztezés-mentes rendszerhez létezik egy $H = (U, F)$ irányított fa valamint V pontjainak egy φ leképezése U-ba úgy, hogy $\mathcal{F}$ tagjai és a fa élei 1-1 értelműen megfelelnek egymásnak, éspedig olymódon, hogy tetszőleges e élre $\varphi^{-1}(U_e)$ az e-nek megfelelő halmaz $\mathcal{F}$-ben.*

Egyszerű mohó algoritmus segítségével igazolható, hogy egy irányított fa éleit meg lehet k színnel úgy színezni, hogy a fa minden legfeljebb k élű irányított útjában a színek különbözők. Ebből és az előbbi állításból kiolvasható az alábbi lemma.

2.2.2. lemma. *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf és $H = (V, \mathcal{H})$ egy keresztezés-mentes magokból álló hipergráf. Ha D minden éle legfeljebb k magba lép be, akkor $\mathcal{H}$-ból kiválasztható legalább $\lceil |\mathcal{H}|/k \rceil$ darab mag úgy, hogy a digráf mindegyik éle legfeljebb egybe lép be közülük.*

Lucchesi és Younger tétele

2.2.3. tétel (Lucchesi és Younger, 1978). *Legyen $D = (V, A)$ (irányítatlanul összefüggő) irányított gráf. A minimális kötés $\tau = \tau(D)$ elemszáma egyenlő az élidegen egyirányú vágások maximális $\nu = \nu(D)$ számával.*

Bizonyítás. (Lovász [40]). A $\nu \leq \tau$ egyenlőtlenség világos, így csak a fordított irány bizonyításával foglalkozunk. ν szerinti indukciót alkalmazunk. Ha ez a szám nulla, akkor nincs egyirányú vágás D-ben (D erősen összefüggő), és így τ is nulla. Tegyük most fel, hogy $\nu(D) > 0$. Mivel a tétel egyélű digráfra nyilvánvalóan fennáll, azt is feltehetjük, hogy $|A| > 1$.

1. Eset. *Létezik a digráfnak olyan e éle, amelyre $\nu(D_e) < \nu(D)$, ahol $\nu(D_e)$ az e összehúzásával keletkező digráfot jelöli.* Az indukciós feltevést $\nu(D_e)$-re felhasználva és a triviális $\tau(D) \leq \tau(D_e) + 1$ egyenlőtlenséget megfigyelve nyerjük, hogy $\tau(D) \leq \tau(D_e) + 1 = \nu(D_e) + 1 \leq \nu(D) \leq \tau(D)$, amiből a kívánt $\tau(D) = \nu(D)$ egyenlőség adódik.

2. Eset. *A digráf minden e élére $\nu(D_e) = \nu(D)$.* Azaz létezik D-ben élidegen egyirányú vágásoknak egy olyan $\nu(D)$ elemszámú $\mathcal{I}_e$ részrendszere, amely tagjainak egyikében sincs benne az e él. Legyen ezen halmazrendszerek egyesítése $\mathcal{J}'$ (úgy értve, hogy egy X vágás annyi példányban fordul elő $\mathcal{J}'$-ben, ahány olyan e él van D-ben, amelyre $X \in \mathcal{I}_e$.) Ekkor $\mathcal{J}'$-nek $|A|\nu(D)$ tagja van és

$(*)$ $\qquad$ D minden éle legfeljebb $k := |A| - 1$ tagban van benne.

Alkalmazzuk a következő kikeresztezési eljárást. Ha $\mathcal{J}'$-nek van két keresztező tagja, akkor helyettesítsük őket a magjaik metszetéhez és uniójához tartozó egyirányú vágásokkal. Egy ilyen cserénél $(*)$ érvényes marad. Miután egy kikeresztezés során a magok elemszámának négyzetösszege nő, legfeljebb véges sok lépés után egy olyan keresztezés-mentes $\mathcal{J}$ rendszert kapunk, amely $|A|\nu(D)$ (nem feltétlenül különböző) egyirányú vágásból áll és amelyre $(*)$ fennáll. A 2.2.2 lemma szerint $\mathcal{J}$ tartalmaz $\lceil |\mathcal{J}|/k \rceil = \lceil |A|\nu(D)/(|A| - 1) \rceil > \nu(D)$ élidegen egyirányú vágást, ellentmondásban $\nu(D)$ jelentésével. A 2. eset tehát nem fordulhat elő. ■

Az élköltséges esetben a Lucchesi–Younger tétel kiterjeszthető egy legolcsóbb kötésre vonatkozó min-max relációvá. A fenti bizonyítási technika számos más helyen is sikerrel alkalmazható. Hátránya viszont, hogy nem alakítható át algoritmussá. Mindazonáltal a legolcsóbb kötés kiszámítására létezik erősen polinomiális algoritmus [19], bár ehhez már szükség van a II. részben bemutatásra kerülő szubmoduláris függvények alkalmazására.

3. Gráfok irányításai

3.1. Elemi gráfirányítási problémák

Mikor lehet egy város utcáit egyirányúvá tenni úgy, hogy (a) minden pontból el lehessen jutni minden másikba, (b) e tulajdonság még akkor is megmaradjon, ha akármely utcát le kell zárni? Nemnegatív egész számok egy sorozata mikor lehet egy pingpong körmérkőzés végeredménye? Egy bajnokság közepén miként lehet megállapítani, hogy egy csapatnak van-e még matematikai esélye az első helyen végezni? Ilyen jellegű kédések modellezésére szolgál a gráfirányítási probléma.

Azt mondjuk, hogy az u és v csúcsokat összekötő irányítatlan $e = uv$ élt megirányítjuk, ha e-t helyettesítjük egy u-ból v-be menő vagy egy v-ből u-ba menő irányított éllel. Egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráf irányításán azt értjük, hogy minden élét megirányítjuk. Néha beszélünk majd vegyes gráfok irányításáról. Egy gráfot akkor neveznek **vegyes**nek, ha irányított és irányítatlan éleket is tartalmazhat. Ennek irányításán azt értjük, hogy az irányítatlan éleit megirányítjuk az irányított élek változatlanul hagyása mellett.

A **gráfirányítási** problémában a kérdés az, hogy mikor létezik G-nek bizonyos előre adott tulajdonságokat kielégítő irányítása. A dolgozatban szereplő valamennyi előírás olyan típusú, hogy bizonyos csúcshalmazok befokára teszünk megkötéseket. Természetesen a kifokokról is beszélhetnénk, de az $X \subseteq V$ halmaz $\delta(X)$ kifokára tett előírások megfogalmazhatók a komplementer halmaz $\varrho(V - X)$ befokának nyelvén, hiszen a $\delta(X) + \varrho(V - X) = d_G(X)$ érték csak a megirányítandó gráftól függ. Összetettebb kérdés az **átirányítási probléma,** amelyben egy irányított gráfról kérdezzük, hogy legkevesebb hány élének megfordításával kapunk egy előírt tulajdonságú irányítást (vagy általánosabban, ha az élek átirányításának adott költsége van, mennyi a keresett átirányítás minimális összköltsége). Az átirányítási probléma gyakran sokkal nehezebb az irányításinál.

Egyszerű esetnek tűnik, amikor adott a gráf csúcsainak egy $\mathcal{F}$ részhalmaz rendszere és olyan irányítást szeretnénk, amelyben az $\mathcal{F}$ tagjainak befoka legalább 1. Könnyen kimutatható azonban, hogy a hipergráfok jó 2-színezhetőségének közismerten NP-teljes feladata, ahol tehát *a ponthalmaz elemeit kell két színnel úgy színezni, hogy ne legyen egyszínű hiperél* megfogalmazható ezen az irányítási nyelven, és ezért az irányítási problémának már ez a speciális alakja is NP-teljes. Valóban, legyen $H = (U, \mathcal{H})$ az a hipergráf, amelynek jó 2-színezhetőségét el akarjuk dönteni. Készítsük el a H-nak egy izomorf $(U', \mathcal{H}')$ példányát, ahol U' diszjunkt U-tól. Legyen $V = U \cup U'$ és álljon a $G = (V, E)$ gráf az uu' élekből, ahol $u \in U$ és $u' \in U'$ egymásnak megfelelő elemek. (Vagyis G nem más, mint egy teljes párosítás.) Legyen $\mathcal{F} := \mathcal{H} \cup \mathcal{H}'$. Mármost könnyen látszik, hogy egy-egy értelmű kapcsolat van a H hipergráf jó 2-színezései valamint G olyan irányításai között, amelyben minden $\mathcal{F}$-beli halmaz befoka legalább 1.

Ilyen értelemben tehát a gráfirányítási probléma túl általános. Jelen célunk olyan irányítási problémákat feltérképezni, melyekre jó karakterizáció adható. A legegyszerűbbekkel kezdjük, melyek motivációt jelentenek a sokkal általánosabbakhoz.

3.1.1. Erősen összefüggő irányítások

1939-ben H. E. Robbins [48] vetette fel a kérdést, hogy egy város utcáit mikor lehet egyirányúsítani (másszóval megirányítani) úgy, hogy bármely pontból el lehessen jutni irányított úton bármely másik pontba? Itt implicit feltesszük, hogy eredetileg semelyik utca sem volt egyirányú (és egy következő kérdés foglalkozik majd azzal, ha már a kiinduláskor is léteznek egyirányú utcák, melyek irányát nem változtathatjuk). Gráfnyelven a kérdés az, hogy egy irányítatlan gráf éleit mikor lehet úgy megirányítani, hogy erősen összefüggő digráfot kapjunk, ahol az erősen összefüggőség definíció szerint azt jelenti, hogy a digráf bármely pontjából bármely másik ponjába vezet irányított út. Ez a tulajdonság azzal ekvivalens, hogy a digráf pontjainak minden valódi nemüres Z részhalmazából lép ki él. (Természetesen Robbins irányítási problémája pontosan annyira „gyakorlati" feladat, mint amennyire például a páros gráfok teljes párosításának létezését szemléltető házasság probléma.)

Ha Z valódi nemüres részhalmazból nem lép ki él, akkor a Z-be belépő élek halmazát **egyirányú vágás**nak nevezzük. Az erősen összefüggőség azzal ekvivalens, hogy a digráfnak nincs egyirányú vágása.

Az erősen összefüggővé irányításhoz a gráfnak mindenesetre összefüggőnek kell lennie, sőt 2-élösszefüggőnek is abban az értelemben, hogy bármely él kihagyása sem rontja el az összefüggőséget. Ha ugyanis az $e = uv$ élt kihagyva a gráf már nem összefüggő, akkor e-t mondjuk v felé irányítva u biztosan nem lesz elérhető v-ből.

3.1.1. tétel (Robbins, 1939). *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik erősen összefüggő irányítása, ha G 2-élösszefüggő, azaz ha G bármely élének elhagyása után is összefüggő marad.*

Mai szemmel nézve ez egy egyszerű kis tétel. A feltétel elegendőségének igazolásához a gráf valamely s pontjából kiindulva mélységi kereséssel határozzunk meg egy F mélységi fát. Ennek éleit irányítsuk s-től el felé. A mélységi fa ismert tulajdonsága, hogy a gráf minden $e = uv$ nem-fa élének két végpontja között az F-ben vezető egyértelmű út irányított út. Irányítsuk e-t v felé, ha v van közelebb s-hez. Könnyű igazolni, hogy így erősen összefüggő irányítást kapunk.

Egy alternatív bizonyítás a fülfelbontási lemmán alapul, amely szerint egy gráf akkor és csak akkor 2-élösszefüggő, ha előállítható egyetlen pontból kiindulva két meglévő pont közötti új él hozzáadásával és egy meglévő él új ponttal történő felosztásával.

Az első bizonyítás előnye, hogy lineáris futásidejű algoritmust szolgáltat, a másodiké pedig, hogy szépen általánosítható Nash-Williams sokkal mélyebb irányítási tételének bizonyítására (lásd a 3.4. szakaszt). Valójában érvényes a Robbins tétel vegyes gráfokra vonatkozó általánosítása is. ([15, 3], [39] 6.11b feladat.)

3.1.2. tétel. *Egy $H = (V, A + E)$ vegyes gráf akkor és csak akkor irányítható erősen összefüggővé, ha nincs benne egyirányú vágás és irányítatlan értelemben 2-élösszefüggő.* ∎

Bizonyítás. Az irányítatlan élek $|E|$ száma szerinti indukció. Legyen $e = uv \in E$ irányítatlan él. Amennyiben az u-ból v felé történő irányítás egyirányú vágást hozna létre, úgy létezik egy olyan X $v\bar{u}$-halmaz, amelyre az e-től eltekintve az X és $V - X$ közötti valamennyi él irányított (eleme A-nak) éspedig $V - X$-től X-felé. Hasonlóképp, amennyiben e-nek a v-ből u-felé történő irányítása hozna létre egyirányú vágást, akkor létezne egy olyan Y $u\bar{v}$-halmaz, amelyre e-től eltekintve az Y és $V - Y$ közötti valamennyi él irányított Y-tól $V - Y$-felé. Ekkor viszont az $X \cap Y$ halmazból nem lép ki sem irányított, sem irányítatlan él, és ugyanez áll az $X \cup Y$ halmazra is. Mivel a feltevés szerint nincsen egyirányú vágás, ezért szükségképpen $X \cap Y = \emptyset$ és $X \cup Y = V$, azaz $Y = V - X$. Így az X és $V - X$ között egyedül az e él vezethet, ellentétben a feltevéssel, hogy nincs elvágó él. ■ ■

Gyökeres összefüggés

Akkor mondjuk, hogy egy digráf **gyökeresen összefüggő,** ha egy kijelölt s gyökérpontjából minden más csúcsa irányított úton elérhető, ami azzal ekvivalens, hogy létezik s gyökerű feszítő fenyő, vagy még azzal, hogy a csúcsoknak minden s-et tartalmazó nemüres részhalmazába lép be él. A Robbins tétel nyomán felvethető, hogy egy G irányítatlan gráfnak mikor létezik gyökeresen összefüggő irányítása? Azonnal látszik a válasz: pontosan akkor, ha G összefüggő. Valóban, e feltétel nyilván szükséges, de elegendő is, hiszen G egy feszítő fáját az s-től „el felé" irányítva egy s-gyökerű fenyőt kapunk, és akkor a többi élt már tetszőlegesen irányíthatjuk. Ez is triviális, de jó kiindulási alapul szolgál érdekesebb problémákhoz: például, ha nem létezik gyökeresen összefüggő irányítás, legkevesebb hány új él hozzáadásával lehet elérni, hogy létezzék? Természetes kérdés, hogy egy vegyes gráfnak mikor létezik gyökeresen összefüggő irányítása, vagy az, hogy egy digráfnak legkevesebb hány élét kell megfordítani, hogy gyökeresen összefüggővé váljék?

3.1.2. Fokszám-előírt irányítások

Nézzük most meg a gráfirányítási problémák egy másik forrását. Egy ping-pong körmérkőzésen n játékos vesz részt és mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést játszik, azaz összesen $n(n-1)/2$ játszmára kerül sor. Az első helyezett m_1 játszmát nyert, a második m_2-t, az utolsó m_n-t, vagyis $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n$. Miképp lehet jellemezni az így előálló monoton csökkenő sorozatokat, azaz egy előre megadott nemnegatív egészekből álló $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n$ sorozatnak milyen tulajdonságokat kell teljesítenie ahhoz, hogy egy körmérkőzés végeredménye legyen? Röviden szólva nemnegatív egész számok egy sorozata mikor realizálható turnamenttel (körmérkőzéssel)?

Természetesen az m_i számok összege éppen a lejátszott játszmák száma, vagyis a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = n(n-1)/2 \tag{3.1}$$

feltétel szükséges. Az $5, 4, 4, 1, 1, 0$ hattagú sorozat ezt a feltételt teljesíti, de mégsem lehet egy körmérkőzés végeredménye, hiszen az utolsó három helyezett összesen

$1 + 1 + 0 = 2$ győzelmet aratott, holott az egymás elleni három meccsen három győzelem születik.

Ezt a megfontolást általánosíthatjuk. Bármely h játékos egymással összesen $h(h-1)/2$ mérkőzést játszik, ezért az elért győzelmeik össz-száma legalább ennyi. Vagyis a realizálhatóságnak szükséges feltétele, hogy minden $h = 1, 2, \ldots, n$-re a sorozat h legkisebb tagjának az összege legalább $h(h-1)/2$ legyen:

(3.2) $\qquad \sum_{i=n-h+1}^{n} m_i \geq h(h-1)/2 \quad$ minden $h = 1, 2, \ldots, n$-re.

Kérdés persze, hogy ez a könnyen ellenőrizhető n darab egyenlőtlenség már biztosítja-e az $m_1 \geq \cdots \geq m_n$ sorozat turnamenttel való realizálhatóságát vagy esetleg felléphetnek további strukturális bajok, amelyek a realizálhatóságot megakadályozzák. H. G. Landau [37] alábbi tétele szerint további akadályok már nem léteznek.

Egy n pontú irányított gráf **befok sorozat**án (másképp **befok vektor**án) a csúcsok befokaiból álló n tagú sorozatot értjük. Egy körmérkőzést egy turnamenttel kényelmes megadni: azt, hogy ha a v játékos legyőzte u-t úgy jelöljük, hogy u-ból v-be húzunk egy irányított élt.

3.1.3. tétel (Landau, 1953). *Az $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n$ sorozat akkor és csak akkor egy turnament befok sorozata, ha* (3.1) *és* (3.2) *fennáll.*

Természetesen a problémának egyéb variációi is felvethetők. Például egy sakk körmérkőzésen egy parti győztese 1 pontot kap, a vesztes 0-t, míg döntetlen esetén mindketten 1/2-t. Vagy hogy ne kelljen félegészekkel bajmolódni, szorozzunk fel kettővel, azaz a győzelemre járjon két pont, míg döntetlennél 1. Egy $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n$ sorozat mikor lehet egy ilyen sakk körmérkőzés végső pontszámsorozata? Legyen G az az n pontú gráf, amelyben minden két pont között pontosan kettő párhuzamos él vezet. Ha a v játékos legyőzi u-t, akkor mindkét párhuzamos élt közöttük irányítsuk v-felé. Ha döntetlenül játszanak, akkor a két párhuzamos él egyikét irányítsuk u felé, a másikat v felé. Így a v pont befoka éppen a v játékos megszerzett pontjainak a száma lesz, tehát a kérdés azzal ekvivalens, hogy G-nek mikor létezik fokszám előírt irányítása.

3.1.4. tétel. *Egy nemnegatív egészekből álló $m_1 \geq \cdots \geq m_n$ sorozat akkor és csak akkor egy körmérkőzés végeredménye* (ahol a győzelemért két pont jár, a döntetlenért egy), *ha* $\sum_1^n m_i = n(n-1)$ *és* $\sum_{n-h+1}^{n} m_i \leq h(h-1)$ $\quad (h = 1, \ldots, n)$.

Rokon kérdéshez jutunk, ha a játékosok páronként nem egy, hanem két (általánosabban k) mérkőzést játszanak. Vizsgálhatjuk, hogy egy számsorozat mikor lehet egy bajnokság végeredménye, ha bizonyos mérkőzéseket már lejátszottak. Az ilyen típusú feladatok nagy része **fokszám-előírt irányítási** probléma, amelyben az a kérdés, hogy mikor lehet egy irányítatlan gráf éleit úgy megirányítani, hogy a keletkező digráf minden csúcsának a befoka előre megadott szám.

Irányítás és párosítás

A kérdés legalább olyan nehéz, mint a teljes párosítás létezésének kérdése páros gráfban (Hall tétel). Valóban, ha $G = (A, B; E)$ páros gráf, amelyben $|A| = |B|$, akkor egy adott teljes párosítás éleit B-felé a többi élt A-felé irányítva G-nek olyan irányítását kapjuk, amelyben minden B-beli pont befoka 1, míg egy A-beli v pont befoka $d_G(v) - 1$. Megfordítva, ha van egy ezen befokszám előírásoknak megfelelő irányítása G-nek, akkor a B felé irányított élek szükségképpen egy teljes párosítást alkotnak. Analóg konstrukcióval látható, hogy fokszám-előírt irányítások segítségével általánosabban egy páros gráf tetszőleges fokszám előírt részgráfjának a problémája is megfogalmazható. Azonban nemcsak a teljes párosítás problémája vezethető vissza a fokszám-előírt irányítás kérdésére, hanem megfordítva is, egy egyszerű elemi konstrukció segítségével a fokszám-előírt irányítás problémája is megfogalmazható páros gráf teljes párosításának feladataként. (Először G minden élét osszuk fel egy új ponttal, majd az így létrejövő páros gráfban minden eredeti v csúcsot helyettesítsünk $m(v)$ egybevágó példánnyal. Ekkor tehát egy eredeti uv élt felosztó új csúcs $m(u) + m(v)$ csúccsal lesz szomszédos). Az irányítási probléma ebben az értelemben tehát ekvivalens a párosítási feladattal, de a messzemenő általánosítási lehetőségek miatt érdemes közvetlenül irányításokkal foglalkozni.

A talán legegyszerűbb fokszám-előírt irányítási feladatban egy G gráf Euler-irányítását keressük (amelyben minden pont befoka egyenlő a kifokával). Könnyen látszik, hogy ilyen pontosan akkor létezik, ha G Euler-gráf (azaz minden pont foka páros), hiszen egy irányítatlan Euler-gráf felbomlik élidegen körök uniójára. Nehezebb egy vegyes gráf Euler-irányíthatóságának kérdése és a választ a következő általános eredmény szolgáltatja majd.

Az irányítási lemma

Egyszerűsége ellenére is alapvető az alábbi eredmény, amelyet kicsit általánosabb alakban fogunk igazolni.

3.1.5. lemma (Irányítási lemma, Hakimi [31]). *Adott $G = (V, E)$ gráfra és $m : V \to \mathbf{Z}$ függvényre a következők ekvivalensek.*

(3.3) *G irányítható úgy, hogy minden v csúcsra $\varrho(v) = m(v)$,*

(3.4) $$e(X) \geq m(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re és } m(V) = |E|,$$

(3.5) $$i(Y) \leq m(Y) \text{ minden } Y \subseteq V\text{-re és } m(V) = |E|.$$

Az irányítási lemmából rögtön következik Landau 3.1.3. tétele, hiszen teljes gráfban $i(X)$ minden h elemű X halmazra $h(h-1)/2$, ezért $i(X) \leq m(X)$ elegendő csak a h darab legkisebb m_i értékre megkövetelni. Hasonlóan adódik a 3.1.4. tétel is, ha az irányítási lemmát arra a gráfra alkalmazzuk, amely a teljás gráfból keletkezik minden élének párhuzamos megduplázásával. Megjegyzendő ugyanakkor, hogy mindmáig nem ismeretes a válasz Iványi Antal szép kérdésére, amely a futballbajnokság lehetséges végeredményeit akarja karakterizálni, ha a győzelemért 3 pont jár, míg a döntetlenért 1.

Egy másik következmény vegyes gráfok Euler irányíthatóságára ad választ.

3.1.6. következmény (Ford és Fulkerson). *Adott egy $M = (V, A + E)$ vegyes gráf, amely a $G = (V, E)$ irányítatlan és $D = (V, A)$ irányított gráfok összetevésével keletkezett. Akkor és csak akkor lehet úgy irányítani az E elemeit, hogy az előálló irányított gráf Euler-féle legyen* (azaz minden pont befoka megegyezzék a kifokával), *ha M-ben minden pont páros sok* (irányított és irányítatlan) *éllel szomszédos azaz*

$$\delta_D(v) + \varrho_D(v) + d_G(v) \text{ páros} \tag{3.6}$$

és

$$d_G(X) \geq \varrho_D(X) - \delta_D(X) \text{ teljesül minden } X \subseteq V\text{-re.} \tag{3.7}$$

3.1.3. Fokszám-korlátos irányítások

S. L. Hakimi 1965-ben [31] azt a kicsit általánosabb feladatot nézte, amikor pontos befok előírás helyett alsó korlát van adva. Ez ekvivalens azzal a variációval, amikor alsó helyett felső korlát adott a keresett irányítás befokaira. Most a kettőt összekapcsoljuk és azt az irányítási feladatot odjuk meg, amelynél a keresendő digráf minden csúcsának a befoka előre megadott korlátok közé esik. Konkrétabban, legyen $f : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ és $g : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f \leq g$. Az alábbi tétel bizonyításában használjuk az útátfordítós technikát, amely a Kőnig tételre vonatkozó alternáló utas bizonyítás megfelelője.

3.1.7. tétel. *A $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak létezik olyan irányítása,*
(i) *amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$e(X) \geq f(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re,} \tag{3.8}$$

(ii) *amelyben $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$i(X) \leq g(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re,} \tag{3.9}$$

(iii) *amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha mind* (3.8), *mind* (3.9) *fennáll.*

Bizonyítás. (3.8) szükségessége. Tegyük fel, hogy létezik jó irányítás. Ekkor $f(X) \leq \sum [\varrho(v) : v \in X] \leq e(X)$.

(3.8) elegendősége. G egy irányításában nevezzünk egy s pontot **hibásnak**, ha $\varrho(s) < f(s)$. Válasszunk G-nek egy olyan irányítását, amelynek a $\sum [f(v) - \varrho(v) : v \text{ hibás}]$ összeggel definiált hibája minimális. Ha ez a hiba 0, vagyis ha nincs hibás csúcs, akkor készen vagyunk.

Legyen most az s csúcs hibás és jelöljük X-szel a megadott irányításban azon pontok halmazát, amelyek s-ből elérhetők. Ekkor X-ből nem lép ki él, és így $\sum [\varrho(v) : v \in X] = e(X)$. Most X szükségképpen tartalmaz egy olyan t pontot, amelyre $\varrho(t) > f(t)$, mert ha nem létezne ilyen pont, akkor $f(X) > \sum [\varrho(v) : v \in X] = e(X)$ volna ellentmondásban (3.8)-gyel. Egy s-ből t-be vezető út éleinek irányítását megfordítva G-nek egy olyan irányítását kapjuk, amelynek hibája kisebb, mint a meglévő irányításé. A módszer ismételt alkalmazásával legfeljebb $f(V)$ út megfordításával egy jó irányítást kapunk.

Analóg módon igazolható a tétel második része (azzal az eltéréssel, hogy most egy t pont akkor hibás, ha a meglévő irányításban $\varrho(t) > g(t)$ és X-szel azon pontok halmazát jelöljük, amelyekből t elérhető). Valójában a második rész formailag is ekvivalens az első azon változatával, amikor olyan irányítást keresünk, amelyben minden v pont kifoka legalább $f(v) := d_G(v) - g(v)$.

Végül a harmadik rész igazolásához induljunk ki egy olyan irányításból, amelyre $(*)$ $\varrho(v) \leq g(v)$ teljesül minden v pontra. Alkalmazzuk az első rész algoritmusát és figyeljük meg, hogy ennek során egy pontnak a befoka csak akkor nő, ha $\varrho(s) < f(s) \leq g(s)$, vagyis $(*)$ automatikusan érvényben marad. ■

Érdekes megfigyelni, hogy ha a fenti bizonyítást a páros gráf teljes párosításával ekvivalens (fentebb megfogalmazott) irányítási feladatra használjuk, akkor épp az alternáló utas módszert kapjuk vissza. A tételből az irányítási lemma könnyen kiolvasható.

3.1.8. következmény. *Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan irányítása, amelyre $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra és van olyan irányítása, amelyre $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra, akkor olyan is van, amely egyszerre elégíti ki mindkét kívánságot.*

Az itt megfogalmazott tulajdonságot **lánctulajdonság**nak (linking property) nevezzük.

3.2. Erősen összefüggő fokszám-korlátos irányítások

Az eddigi két irányítási probléma összevonásaként megvizsgáljuk, hogy mikor létezik fokszám-korlátokat kielégítő erősen összefüggő irányítás. A válaszhoz szükségünk lesz a $\sigma_G(X)$ vagy röviden $\sigma(X)$ függvényre, amely egy $X \subseteq V$ nemüres halmazra elhagyásával keletkező gráf komponenseinek számát jelöli.

Egy erősen összefüggő irányításában minden nemüres $X \subseteq V$ halmaz kifoka (és befoka) legalább $\sigma(X)$, hiszen $G - X$ minden komponensébe lép be él, így X-ből legalább $\sigma(X)$ él lép ki. A következő tételnek [24] idézem a teljes eredeti bizonyítást, mert szépen mutatja az útátfordítós technikát kissé bonyolultabb körülmények között.

3.2.1. tétel (Frank és Gyárfás, 1976). *Legyen a $G = (V, E)$ 2-élösszefüggő irányítatlan gráf csúcsain adva az $f : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ és $g : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ függvény, melyekre $f \leq g \leq d_G$. G-nek akkor és csak létezik olyan erősen összefüggő irányítása,*

(i) *amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

(3.10) $$f(X) \leq e(X) - \sigma(X) \quad \text{minden } X \subseteq V\text{-re},$$

(ii) *amelyben* $\varrho(v) \leq g(v)$ *minden* v *csúcsra fennáll, ha*

$$(3.11) \qquad g(X) \geq i(X) + \sigma(X) \text{ minden } \emptyset \subset X \subseteq V\text{-re},$$

(iii) *amelyben* $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ *minden* v *csúcsra fennáll, ha mind* (3.10), *mind* (3.11) *fennáll.*

Bizonyítás. (i) Ha létezik olyan erősen összefüggő irányítás, amelyre $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsban fennáll, akkor X-ből legalább $\sigma(X)$ él kilép, így $f(X) \leq \sum\left[\varrho(v) : v \in X\right] = e(X) - \delta(X) \leq e(X) - \sigma(X)$, azaz (3.10) következik.

Tegyük most fel, hogy (3.10) teljesül. Induljunk ki G-nek egy olyan erősen összefüggő irányításából, amelyre a $H := \sum\left[(f(v) - \varrho(v))^+ : v \in V\right]$ „hibaösszeg" minimális. (Itt $x^+ := \max\{0, x\}$.) Amennyiben $H = 0$, azaz $\varrho(v) \geq f(v)$ teljesül minden pontra, úgy készen vagyunk, így tegyük fel, hogy $H > 0$, azaz van olyan s pont, amelyre $\varrho(s) < f(s)$.

Ha X és Y két metsző, 1 befokú részhalmaza $V - s$-nek, akkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is 1 befokú (ugyanis $1 + 1 = \varrho(X) + \varrho(Y) \geq \varrho(X \cup Y) + \varrho(X \cap Y) \geq 1 + 1$-ből $\varrho(X \cup Y) = 1 = \varrho(X \cap Y)$ adódik). Így az s-t nem tartalmazó maximális $C_1, \dots, C_l$ 1-befokú halmazok páronként diszjunktak. Igaz továbbá, hogy két ilyen C_i között nem vezethet él, mert ha mondjuk C_1-ből vezetne C_2-be, akkor $C_1 \cup C_2$ is 1 befokú volna, ellentétben a maximalitással. Legyen $X = V - \cup_i C_i$ (illetve $X = V$, ha nem létezik s-t nem tartalmazó 1 befokú halmaz.) Kapjuk, hogy $\delta(X) \leq l \leq \sigma(X) \leq \delta(X)$, amiből $\delta(X) = \sigma(X)$.

Állítjuk, hogy X-nek van „túltelített" t pontja, azaz olyan, amelyre $\varrho(t) > f(t)$. Ha ugyanis nem létezne, akkor $f(X) > \sum\left[\varrho(v) : v \in X\right] = e(X) - \delta(X) = e(X) - \sigma(X)$, ellentétben a (3.10) feltevéssel.

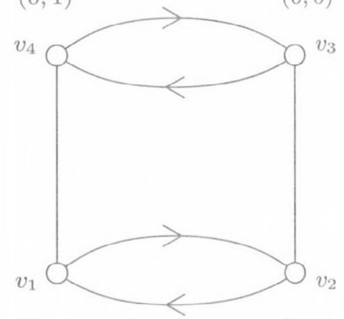
Legyen P tetszőleges s-ből t-be vezető út. Állítjuk, hogy ennek irányítását megfordítva erősen összefüggő irányítást kapunk. Valóban, ha az átirányítás után egy Z halmazba nem lépne be él, akkor szükségképpen $t \in Z$, $s \notin Z$, továbbá a P út egyetlen egyszer lép Z-be és nincs is más Z-be lépő él, azaz $\varrho(Z) = 1$. Ilyen Z halmaz létezése azonban ellentmondana a C_i halmazok maximális választásának.

A P út megfordítása ráadásul olyan erősen összefüggő irányítást eredményez, amelynek a hibája eggyel kisebb, mint a kiindulási irányításé, ellentmondásban annak minimális hibájú választásával, amivel az (i) rész bizonyítása teljes.

A második rész analóg módon bizonyítható.

A harmadik részhez induljunk ki G-nek egy olyan erősen összefüggő irányításából, amelyben v minden pont befoka legfeljebb $g(v)$ és erre alkalmazzuk az első rész bizonyítását. Azt kell csupán megfigyelni, hogy ott egy s pont befoka csak akkor nőhet, ha $\varrho(s) < f(s)$. Így az $f \leq g$ feltevés miatt a $\varrho(v) \leq g(v)$ tulajdonság nem tud elromolni. ■

A 3.2.1. tétel egy újabb megnyilvánulása a lánctulajdonságnak. Mivel a tétel a Robbins tétel fokszám-korlátos kiterjesztésének tekinthető, megkérdezhetjük, hogy a 3.1.2. következménynek is van-e hasonló fokszám-korlátos alakja. Meglepő módon a lánctulajdonság itt már érvényét veszti, azaz a következő állítás **nem érvényes**: *Ha egy vegyes gráfnak van olyan erősen összefüggő irányítása, amelyben minden v pont befoka legalább $f(v)$, és van olyan erősen összefüggő irányítása, amelyben minden v pont befoka legfeljebb $g(v)$, akkor létezik olyan erősen összefüggő irányítása is, amelyben minden pont befoka legalább $f(v)$ és legfeljebb $g(v)$.* Az állítást cáfoló vegyes gráf négy pontból áll, v_1v_4 és v_2v_3 irányítatlan élek, v_3 és v_4 között van két ellentétesen irányított párhuzamos él, és v_1 és v_2 között van két ellentétesen irányított párhuzamos él. Az f alsó korlát a négy ponton rendre $1,0,0,0$, míg a g felső korlát rendre $1,1,0,1$. (Lásd az 1. ábrát.)



1. ábra

A 3.2.1. tétel bizonyítási módszere könnyen átvihető a gyökeresen összefüggő fokszám-korlátos irányításokra. Ugyanakkor a kiadódó tételben van egy érdekes különbség: a 3.2.1. tételben az alsó korlátokra vonatkozó (i), illetve a felső korlátokra vonatkozó (ii) jellemzések szimmetrikus megfogalmazásúak, sőt valójában egymással ekvivalensek, hiszen a befokokra vonatkozó alsó korlát ekvivalens a kifokokra vontakozó felső korláttal, és egy erősen összefüggő digráf minden élét megfordítva erősen összefüggő digráfot kapunk. Gyökeresen összefüggő gráfoknál ezen utóbbi állítás megfelelője nem érvényes, és ezért van az, hogy az alábbi tételben az (i) és (ii) rész nem szimmetrikus: a felső korlátokra vonatkozó (ii) jellemzésben a $\sigma(X)$ függvény egyáltalán nem játszik szerepet.

3.2.2. tétel [24]. *Legyen a $G=(V,E)$ összefüggő irányítatlan gráfnak s kijelölt gyökérpontja, és jelölje ε_1 azt a halmazfüggvényt, amelyre $\varepsilon_1(X)$ $(\emptyset \subset X \subset V)$ annak megfelelően 0 vagy 1, hogy X tartalmazza s-t vagy sem. Adott továbbá az $f : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ és $g : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ függvény, melyekre $f \le g \le d_G$. Akkor és csak akkor létezik G-nek olyan gyökeresen élösszefüggő irányítása,*

(i) *amelyben $\varrho(v) \ge f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$f(X) \le e(X) - \sigma(X) + \varepsilon_1(X) \tag{3.12}$$

teljesül V minden nemüres X részhalmazára,

(ii) *amelyben $\varrho(v) \le g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$g(X) \ge i(X) + \varepsilon_1(X) \quad \text{minden } \emptyset \subset X \subseteq V\text{-re,} \tag{3.13}$$

(iii) *amelyben* $f(v) \le \varrho(v) \le g(v)$ *minden* v *csúcsra fennáll, ha mind* (3.12), *mind* (3.13) *fennáll.*

3.2.1. Alkalmazás: fokszám-korlátos fák

A 3.2.2. irányítási tételt alkalmazhatjuk egy érdekes részgráf probléma megoldására. Egy összefüggő gráfban szeretnénk olyan feszítő fát keresni, amely a csúcsokon fokszám-korlátoknak tesz eleget. Ez így túl általános, hiszen ha minden pontban a fokszámra felső korlátként 2-t adunk meg, akkor a feladat a Hamilton út létezésének problémájával ekvivalens, ami NP-teljes. Ha azonban a csúcsoknak csak egy stabil részhalmazán vannak korlátok, akkor az alábbi jó karakterizáció adható.

3.2.3. tétel. *Legyen* G *összefüggő irányítatlan gráf és* $S \subset V$ *a* G *pontjainak egy stabil részhalmaza. Legyen továbbá* $f_S : S \to \mathbf{Z}_+$ *és* $g_S : S \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ *két függvény, melyekre* $f_S \le g_S$. *Akkor és csak akkor létezik* G*-nek olyan* F *feszítő fája,*

(i) *amelyre* $d_F(v) \ge f_S(v)$ *minden* $v \in S$*-re, ha*

$$f_S(X) \le |X| + |\Gamma(X)| - 1 \quad \textit{minden } \emptyset \subset X \subseteq S \textit{ halmazra,} \tag{3.14}$$

(ii) *amelyre* $d_F(v) \le g_S(v)$ *minden* $v \in S$*-re, ha*

$$g_S(X) \ge |X| + \sigma(X) - 1 \quad \textit{minden } \emptyset \subset X \subseteq S \textit{ halmazra,} \tag{3.15}$$

(iii) *amelyre* $f_S(v) \le d_F(v) \le g_S(v)$ *minden* $v \in S$*-re, ha mind* (3.14), *mind* (3.15) *teljesül.*

Ki fog derülni, hogy a 3.2.3. tétel egy általánosabb, matroidokra vonatkozó eredmény speciális esete (lásd a II. részt).

A bizonyítás az irányítások és a fokszám előírt fák közötti kapcsolaton múlik.

3.2.4. lemma. *A* $G = (S, T; E)$ *páros gráfban legyen* $m : S \to \mathbf{Z}^+$ *olyan függvény, amelyben* $m(S) = |V| - 1$. *Legyen* $s \in V - S$ *tetszőleges pont.* G*-nek akkor és csak akkor létezik olyan* F *feszítő fája, amelyre* $d_F(v) = m(v)$ *minden* $v \in S$ *csúcsra, ha* G*-nek létezik olyan irányítása, amelyben* s*-ből* G*-nek minden csúcsa elérhető és minden* S*-beli* v *csúcs befoka* $d(v) - m(v) + 1$.

Legyen $g(v) := \infty$, ha $v \in V - S$ és $g(v) := d(v) - f_S(v) + 1$, ha $v \in S$. Legyen $f(v) := \{-\infty\}$, ha $v \in V - S$ és $f(v) := d(v) - g_S(v) + 1$, ha $v \in S$. Figyeljük meg, hogy (3.14) ekvivalens a (3.13) feltétellel, (3.15) pedig a (3.12) feltétellel. Így a 3.2.2. tétel alkalmazható.

3.3. Optimális átirányítások

Vizsgáljuk meg a fokszám-előírt valamint az erősen összefüggő irányításokra vonatkozó optimális átirányítási problémát.

3.3.1. Fokszám-előírt átirányítások

Tegyük fel, hogy adott m befokszám előírásra teljesülnek az irányítási lemma feltételei, és így a G gráfnak létezik olyan irányítása, amelyben $\varrho(v) = m(v)$ minden v csúcsra. Az átirányítási problémában a G-nek egy meglévő D irányításából indulunk ki és minimális számú (vagy általánosabban minimális összköltségű) él irányításának a megfordításával szeretnénk egy fokszám-előírt irányítást megkapni. Ehhez legyen adott egy $c : A \to \mathbf{R}_+$ költségfüggvény, amelyre $c(a)$ azt jelzi, hogy az a él megfordítása mennyibe kerül.

Megmutatjuk, hogy ez minimális költségű áram feladatként megfogalmazható, így az erre vonatkozó ismert polinomiális algoritmus használható. A $D = (V, A)$ digráf bizonyos éleinek átirányítását egy $z : A \to \{0, 1\}$ vektor segítségével írjuk le, éspedig úgy, hogy $z(a) = 1$, ha a-t megfordítjuk, és $z(a) = 0$, ha nem. Ekkor egy v pont új befoka $\varrho_D(v) - \varrho_z(v) + \delta_z(v)$, így ennek kell az előírt $m(v)$ értékkel megegyeznie, vagyis a z-re a kívánság $\varrho_z(v) - \delta_z(v) = b(v)$, ahol $b(v) := \varrho_D(v) - m(v)$.

Adjunk D-hez egy új s pontot és minden $v \in V$ csúcsból egy vs élt. A megnövelt D^+ digráf élhalmazán definiáljuk az f és g korlátokat úgy, hogy minden eredeti a élen legyen $f(a) := 0$, $g(a) := 1$, míg az új éleken $f(vs) := g(vs) := b(v)$. A c költségfüggvényhez rendeljük hozzá a c^+ kiterjesztését, amely eredeti éleken megegyezik c-vel, míg az újakon $c^+(vs) = 0$ Adott $z : A \to \{0, 1\}$ vektorhoz rendeljük hozzá a z^+ kiterjesztését, amely eredeti éleken megegyezik z-vel, míg az újakon $z^+(vs) = b(s)$.

A konstrukcióból kiolvasható, hogy egy z $0-1$-vektor pontosan akkor definiálja D-nek egy m befok vektorú átirányítását, ha z^+ megengedett egészértékű áram D^+-ban. Így a minimális költségű fokszám-előírt átirányítási probléma valóban egy minimális költségű megengedett áram problémával ekvivalens.

3.3.2. Gyökeresen összefüggő átirányítások

Az átirányítási feladat más előírásokra is megfogalmazható. Nézzük például meg, hogy egy $D = (V, A)$ digráfnak minimálisan hány élét kell megfordítani ahhoz, hogy az s pontjából minden más pont elérhető legyen. Rögtön az általánosabb költséges feladatot tekintjük, amikor adott az élhalmazon egy $c : A \to \mathbf{R}_+$ költségfüggvény. A feladatot visszavezetjük a minimális költségű fenyő feladatára, amelyre az 1.2. részben láttunk megoldást.

Ennek érdekében adjuk a digráfhoz minden e élének az $\bar{e}$ megfordítottját. A keletkező D' digráfban legyen $c'(e) = 0$ és $c'(\bar{e}) = c(e)$.

3.3.1. állítás. *A minimális c'-költségű s-fenyő költsége éppen a gyökeres összefüggés érdekében megfordítandó élek minimális c-költsége.*

Bizonyítás. D' tetszőleges F feszítő s-fenyőjének a $c'(F)$ költsége egyenlő a benne szereplő megfordított élek költségével, tehát D legfeljebb $c'(F)$ összköltségű élének megfordításával gyökeresen összefüggővé tehető. Megfordítva, ha J a D éleinek egy minimális c-költségű halmaza, melyet átirányítva már létezik egy F feszítő s-fenyő, akkor J minimalitása folytán F tartalmazza az összes J-beli él megfordítottját, és ezért D'-ben van $c(J)$ költségű s-fenyő. ∎

Az állítás nyomán Chu és Liu minimális költségő fenyőt meghatározó algoritmusának segítségével meghatározhatjuk a keresett optimális átirányítást. Fulkerson 1.2.5. tételéből kiolvasható az átirányítás minimális költsége, amelyet most a $c \equiv 1$ speciális esetben megadunk.

3.3.2. tétel. *Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban a gyökeresen összefüggővé tevéshez átirányítandó élek minimális száma egyenlő a gyökér felé mutató élidegen egyirányú vágások maximális számával.*

3.3.3. Erősen összefüggő átirányítások

Robbins nyomán tudjuk, hogy egy 2-élösszefüggő gráfnak mindig van erősen összefüggő irányítása. Ennél sokkal nehezebb az átirányítási kérdés, amely arra vonatkozik, hogy egy digráfot legkevesebb hány élének átfordításával tehetünk erősen összefüggővé. Mindenesetre a Robbins-tétel 3. bizonyításból kiolvasható az alábbi megfigyelés.

3.3.3. állítás. *Egy elvágó él mentes digráfban egy tartalmazásra nézve minimális kötés éleinek irányítását megfordítva erősen összefüggő digráfot kapunk.*

Emiatt az átirányítási kérdésre a választ Lucchesi és Younger 2.2.3. tétele adja meg: a minimum az élidegen egyirányú vágások maximális számával egyenlő. Élek soros többszörözésével rögtön megkapjuk a Lucchesi–Younger tétel költséges változatát, amely a legolcsóbb erősen összefüggő átirányítás kérdésére is választ jelent.

3.3.4. tétel. *Legyen a $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán adott a $c : A \rightarrow \mathbf{Z}_+$ nemnegatív egészértékű költségfüggvény. A minimális költségű kötés τ_c költsége egyenlő a (nem feltétlenül különböző) c-független egyirányú vágások maximális ν_c számával, ahol a c-függetlenség azt jelenti, hogy a digráf bármely f élét a szóbanforgó vágások közül legfeljebb $c(f)$ tartalmazza.* ■

A [19] dolgozatban (magyarul a [38] könyv függelékében) e tételre egy olyan konstruktív bizonyítás szerepel, amely erősen polinomiális algoritmust szolgáltat a minimális költségű kötés valamint a szóbanforgó maximális vágáspakolás meghatározására.

Kis kitérőként megemlítjük, hogy a 3.3.3. állításból adódik, hogy egy minimális kötés komplementere is kötés. Emiatt ha minden egyirányú vágásban van legalább két él, akkor van két diszjunkt kötés. Érdekes, hogy e könnyű tétel következő kézenfekvőnek látszó általánosítása mind a mai napig nyitott, már $k = 3$-ra és síkgráfokra is:

3.3.5. sejtés (Woodall [54], 1978). *Ha egy digráfban minden egyirányú vágás legalább k élt tartalmaz, akkor létezik k diszjunkt kötés.*

3.4. Magasabb élösszefüggőségek

Következő célunk az, hogy Lovász leemelési tételének segítségével levezessük Robbins tételének Nash-Williams féle általánosítását. Utána megfogalmazzuk ennek gyökeres k-élösszefüggőségre vonatkozó ellenpárját, majd felvetjük egy lehetséges közös általánosítás kérdését is.

3.4.1. k-élösszefüggő irányítás

Természetesen vetődik fel a Robbins tétel következő általánosításának kérdése. Tegyük fel, hogy a városi közlekedés irányítói tartanak attól, hogy valamely út váratlan lezárása után már nem biztosított az erősen összefüggőség. Magyarán, egy olyan erősen összefüggő irányítást szeretnénk, amely akármely él elhagyása után is erősen összefüggő marad. Még általánosabban: a megirányított gráf akármely $k-1$ élének elhagyása után is maradjon rősen összefüggő. A kérdés tehát az, hogy egy irányítatlan gráfnak mikor létezik k-élösszefüggő irányítása.

$2k$-élösszefüggő gráfok előállítása

Robbins tételének második bizonyítása a 2-élösszefüggő gráfok fülfelbontásán alapult. Hogyan lehetne a $(2k)$-élösszefüggő gráfokat előállítani? Lovász 2.1.3 teljes leemelési tétele szerint $K \geq 2$-re egy K-élösszefüggő gráf bármely páros fokú csúcsánál van olyan teljes leemelés, amely K-élösszefüggő gráfot eredményez. A teljes leemelés inverz művelete a következő: válasszunk ki tetszőlegesen j meglévő élt, mindegyiket osszuk fel egy ponttal, és egyesítsük a j osztás-pontot egyetlen új ponttá. E műveletre úgy hivatkozunk, hogy **összecsípünk** j élt (egy új ponttal).

Könnyű igazolni, hogy egy $2k$-élösszefüggő gráf bármely k élének összecsípése $2k$-élösszefüggő gráfot eredményez. Eszerint $2k$-élösszefüggő gráfoknak egy lehetséges gyártási módja, hogy egy pontból kiindulva egymás után a meglévő gráfhoz élt adunk hozzá vagy k élét összecsípjük. Valójában minden $2k$-élösszefüggő gráf így előállítható, amint ez Lovász 2.1.3 leemelési tételéből és abból az egyszerűen igazolható megfigyelésből könnyen kiolvasható, hogy minden legalább két pontú, élelhagyásra nézve minimális K-élösszefüggő gráfnak van K-ad fokú pontja ($K \geq 1$).

3.4.1. tétel (Lovász, 1979). *Egy $G=(V,E)$ irányítatlan gráf akkor és csak akkor $2k$-élösszefüggő, ha egy pontból kiindulva felépíthető az alábbi két művelet egymás utáni ismételt alkalmazásával.*

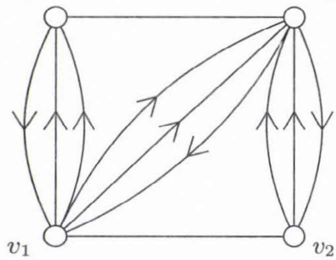
(A) *Két létező pontot kössünk össze új éllel.*

(B) *Csípjünk össze k meglévő élt egy új ponttal.*

Miután az összecsípési művelet egy irányított gráf k-élösszefüggőségét is megőrzi, rögtön kiadódik Nash-Williams irányítási tétele.

3.4.2. tétel (Nash-Williams gyenge irányítási tétele, 1960). *A G irányítatlan gráf éleit akkor és csak akkor lehet úgy irányítani, hogy a kapott irányított gráf k-élösszefüggő legyen, ha G $2k$-élösszefüggő.*

A Nash-Williams féle irányítási tétel és a 3.1.2. tétel természetesen kínálkozó közös általánosítása $k \geq 2$-re **nem érvényes:** *Egy $D = (V, A)$ irányított és $G = (V, E)$ irányítatlan gráfból álló $H = (V, A + E)$ vegyes gráfban az E elemei akkor és csak akkor irányíthatók úgy, hogy k-élösszefüggő digráfot kapjunk, ha minden $X \subset V$ halmazra $d_G(X) \geq (k - \varrho_D(X))^+ + (k - \delta_D(X))^+$* (ahol egy x számra x^+ az x és a 0 maximumát jelöli). Ellenpéldaként tekintsük a $k = 2$ esetben azt a $H = (V, A + E)$ vegyes gráfot, ahol $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{v_1v_2, v_3v_4\}$, míg A-ban 9 irányított él van: két párhuzamos v_1v_4 él, egy v_4v_1 él, két párhuzamos v_1v_3 él, egy v_3v_1 él, végül két párhuzamos v_2v_3 él, egy v_3v_2 él. egyszerű esetszétválasztás mutatja, hogy a két irányítatlan v_1v_2, v_3v_4 élnek nem lehet úgy irányítást adni, hogy 2-élösszefüggő digráfot kapjunk, bár az állításban szereplő feltétel teljesül. Ráadásul, a példából nem is igen olvasható ki az irányíthatósághoz szükséges további feltétel. (Lásd a 2. ábrát.)



2. ábra

Megfogalmazható tehát a kérdés, hogy mi egy vegyes gráf k-élösszefüggő irányításának a feltétele. A választ a dolgozat II. részére halasztjuk, mert a szubmoduláris áramok elméletét igényli. Hasonlóképp, tekinthetjük a k-élösszefüggőségre vonatkozó optimális átirányítási problémát. Ezt a $k = 1$ esetben már említettük, az általános esetben itt is a szubmoduláris áramok segítenek majd.

3.4.2. Fokszám-korlátos k-élösszefüggő irányítások

Nem csak a Robbins tétel, hanem a fokszám-korlátos erősen összefüggő irányításra vonatkozó 3.2.1. tétel is kiterjeszthető k-élösszefüggő irányításokra. Valójában ez az eredmény egy jóval általánosabb tétel következményeként adódik.

3.4.3. tétel. *Legyen adott $f : V \to \mathbf{Z}_+$ és $g : V \to \mathbf{Z}_+$ két függvény, melyekre feltesszük, hogy minden v csúcsra $k \leq f(v) \leq g(v) \leq d_G(v)$. Legyen a $G = (V, E)$ gráf $2k$-élösszefüggő. G-nek akkor és csak akkor létezik olyan k-élösszefüggő irányítása,*
(i) amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha V minden $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_r\}$ partíciójára

$$i(V_0) + e(\mathcal{P}) \geq f(V_0) + kr, \tag{3.16}$$

(ii) amelyben $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha V minden $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_r\}$ partíciójára

$$e(V_0) - e(\mathcal{P}) \leq g(V_0) - kr, \tag{3.17}$$

(iii) *amelyben* $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ *minden* v *csúcsra fennáll, ha mind* (3.16), *mind* (3.17) *fennáll.*

3.4.3. Gyökeresen k-élösszefüggő irányítás

Mikor létezik egy gráfnak gyökeresen k-élösszefüggő irányítása, azaz olyan, amelyben egy megadott s gyökérpontból minden pontba vezet k élidegen út? A természetes szükséges feltétel, hogy a gráf maga k-élösszefüggő legyen csak a $k = 1$ esetben elegendő, mert például $k = 2$-re egy háromszögnek nincs olyan irányítása, amelyben az egyik pontjából mindkét másikba vezet 2 élidegen út. Egy gyökeresen k-élösszefüggő irányítás esetén a gyökértől eltekintve minden csúcs befoka legalább k vagyis egy ilyen gráfnak legalább $k(n-1)$ éle van. Azonban ezen két szükséges feltétel még együtt sem elegendő. Meg kell ugyanis követelnünk a csúcsok minden t-részes nemüres halmazokba történő $\mathcal{F}$ partíciójára, hogy a különböző részeket összekötő ún. keresztélek száma is legalább $k(t-1)$ legyen. Egy ilyen gráfot **k-partíció összefüggő**nek nevezünk.

3.4.4. tétel [16]. *Legyen a* $G = (V, E)$ *irányítatlan gráfnak* s *egy kijelölt pontja. Akkor és csak létezik* G*-nek gyökeresen* k*-élösszefüggő irányítása, ha* G k*-partíció-összefüggő, azaz*

$$e(\mathcal{F}) \geq k(t-1) \tag{3.18}$$

teljesül V *minden* $\mathcal{F} := \{V_1, \ldots, V_t\}$ *partíciójára, ahol* $e(\mathcal{F})$ *a keresztélek száma.*

A bizonyítás érdekessége, hogy a fokszám-korlátozott irányításoknál már jól bevált útfordítási technikát használja, némileg bonyolultabb körülmények között. Ugyanezzel a módszerrel igazolható a fokszám-korlátot és a gyökeres k-élösszefüggőségi előírást ötvöző irányítási tétel, melynek megfogalmazásához használjuk a V ponthalmaz X részhalmazain értelmezett ε_k függvényt:

$$\varepsilon_k(X) = k, \text{ ha } s \notin X, \text{ míg } \varepsilon_k(X) = 0, \text{ ha } s \in X.$$

3.4.5. tétel. *A* $G = (V, E)$ *gráfnak legyen* s *egy kitüntetett gyökérpontja. Legyen továbbá* $f : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ *és* $g : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ *két függvény, melyekre* $0 \leq f(v) \leq g(v) \leq d_G(v)$ *minden* $v \in V$ *pontra.* G*-nek akkor és csak létezik olyan gyökeresen* k*-élösszefüggő irányítása,*

(i) *amelyben* $\varrho(v) \geq f(v)$ *minden* v *csúcsra fennáll, ha*

$$e(\mathcal{F}) \geq f(V_0) + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_k(V_i) \tag{3.19}$$

teljesül V *minden olyan* $\mathcal{F} := \{V_0, V_1, \ldots, V_t\}$ *partíciójára, ahol egyedül a* V_0 *rész lehet üres.*

(ii) *amelyben* $\varrho(v) \leq g(v)$ *minden* v *csúcsra fennáll, ha* G k*-partíció-összefüggő és*

$$g(X) \geq i(X) + \varepsilon_k(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{3.20}$$

(iii) *amelyben* $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ *minden* v *csúcsra fennáll, ha mind* (3.19), *mind* (3.20) *fennáll.* ■

Megjegyzendő azonban, hogy [16]-ban a 3.4.4. tétel egy általánosabb, vegyes gráfokra vonatkozó alakja szerepelt, amelynek bizonyítása az útfordítós módszernél összetettebb technikát igényel. Ezt az alakot a II. részben fogalmazzuk majd meg.

3.4.4. Közös általánosítás?

Nem lehetne-e a Nash-Williams féle 3.4.2 és a 3.4.4 irányítási tételeknek közös általánosítását találni? Legyen $0 \leq l \leq k$ két egész. Azt mondjuk, hogy egy irányított gráf (k, l)**-élösszefüggő**, ha valamelyik s pontja olyan, hogy onnan minden más pontba vezet k élidegen út és minden más pontból s-be vezet l élidegen út. Az $l = 0$ speciális esetben visszajutunk a gyökeresen k-élösszefüggő digráf fogalmához, míg $k = l$ eset a k-élösszefüggőségnek felel meg. Kérdés, hogy mikor létezik egy gráfnak (k, l)-élösszefüggő irányítása?

Megjegyzendő, hogy ha egy s-re nézve (k, l)-élösszefüggő irányításban veszünk $(k - l)$ élidegen ss'-utat és ezek irányítását megfordítjuk, akkor egy s'-re nézve (k, l)-élösszefüggő irányítást kapunk. Így az s pont kiválasztásának nincs szerepe. A 3.4.4. tételben szereplő partíciós feltétel kézenfekvő általánosításaként megállapítható szükséges feltétel, hogy a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf pontjainak minden $t \geq 2$ részes partíciójára a keresztélek száma legalább $k(t - 1) + l$, hiszen a G egy (k, l)-élösszefüggő irányítása esetén az s-t tartalmazó partíció részbe legalább l él lép be, míg a többi $t - 1$-be legalább k. Nevezzünk egy ilyen irányítatlan gráfot (k, l)**-partíció összefüggő**nek.

A II. részben meg fogjuk vizsgálni, hogy egy gráf (k, l)-partíció összefüggősége vajon már elegendő-e a (k, l)-élösszefüggő irányítás létezéséhez.

4. Pakolás és fedés fenyőkkel és fákkal

A Menger tétel élváltozata arra adott választ, hogy mikor lehet egy gráf vagy digráf élhalmazát k részre bontani úgy, hogy mindegyik rész tartalmazzon st-utat, magyarán, hogy mikor létezik k élidegen st-út. Természetes ugyanezt a kérdést más összefüggőségi fogalmakkal kapcsolatban is feltehetjük: egy G irányítatlan gráf élhalmaza például mikor bontható fel k darab összefüggő (V-t feszítő) részre, más szóval mikor létezik G-ben k élidegen feszítő fa? Vagy egy digráfban mikor létezik k élidegen feszítő fenyő? A pakolási probléma ellenpárja a fedési feladat. Például, mikor fedhető le egy gráf élhalmaza k fával?

Ebben a fejezetben e két kapcsolódó kérdéskört vizsgáljuk meg.

4.1. Gyökeresen k-élösszefüggő digráfok előállítása

Nash-Williams irányítási tételének bizonyítása azon múlt, hogy Lovász 2.1.3 irányítatlan leemelési tétele segítségével meg lehetett adni a $2k$-élösszefüggő gráfok előállítását. Hasonló jó szolgálatokat tesz Mader irányított 2.1.6 leemelési tétele gyökeresen k-élösszefüggő digráfok előállítására.

Ha egy $D = (V, A)$ digráf minden pontja irányított úton elérhető egy kijelölt s gyökérpontjából, akkor D tartalmaz s gyökerű feszítő fenyőt és így D felépíthető

s-ből kiindulva élek egymás utáni hozzávételével úgy, hogy minden új élnek a töve meglévő csúcs. Hogyan építhetők fel a gyökeresen k-élösszefüggő digráfok? Emlékeztetünk, hogy egy digráf akkor gyökeresen k-élösszefüggő, ha

(4.1) $\qquad \varrho(X) \geq k$ minden nemüres $X \subseteq V - s$ halmazra,

ami Menger tétel alapján azzal ekvivalens, hogy s-ből minden csúcsba vezet k élidegen út. Hasznosnak bizonyul a következő egyszerű megfigyelés.

4.1.1. állítás. *Tegyük fel, hogy egy $D = (V, A)$ digráfban $(*)$ egy s gyökérből egy $U \subseteq V - s$ halmaz minden pontjába vezet k élidegen út. Ha valamely $t \in U$ csúcsra $\varrho(t) > k$, akkor az egyik t-be lépő él kihagyható a $(*)$ tulajdonság elrontása nélkül.*

Mader irányított leemelésekre vonatkozó 2.1.6. tétele felhasználható gyökeres k-élösszefüggést megőrző leemelésre is.

4.1.2. tétel. *Legyen $D = (U + z, A)$ olyan digráf, amelynek egy kijelölt $s \in U$ gyökércsúcsából U minden pontjába vezet k élidegen út, és tegyük fel, hogy $\varrho_D(z) \geq \delta_D(z)$. Ekkor a z-ből kilépő éleket párba lehet alkalmas $\delta_D(z)$ darab z-be belépő éllel úgy, hogy e párokat egyszerre leemelve és a fennmaradó $\varrho_D(z) - \delta_D(z)$ z-be lépő élt pedig kihagyva gyökeresen k-élösszefüggő digráfot kapunk az U csúcshalmazon.*

Ezeket összetéve megkapjuk a keresett előállítást:

4.1.3. tétel. *Egy D digráf akkor és csak akkor gyökeresen k-élösszefüggő s-re nézve* ($k \geq 1$), *ha előállítható az s-ből kiindulva az alábbi három művelet egymás utáni ismételt alkalmazásával.*

(B1) *Két létező pontot kössünk össze egy irányított éllel.*

(B2) *Adjunk a digráfhoz egy új pontot és vezessünk bele k* (esetleg párhuzamos) *új élt.*

(B3) *Csípjünk össze j meglévő élt* ($0 < j < k$) *egy új z ponttal, és adjunk a digráfhoz $k - j$ darab z-be vezető* (esetleg párhuzamos) *új élt.*

4.2. Fenyők pakolása

4.2.1. Közös gyökerű fenyők pakolása

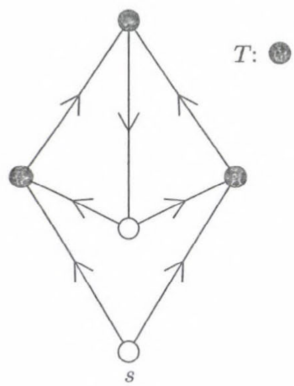
Nevezzünk egy $D = (V, A)$ digráfot k-**fenyő-összefüggő**nek valamely $s \in V$ gyökérpontjára nézve, ha D tartalmaz k élidegen s-gyökerű feszítő fenyőt. Egyszerű megfontolással adódik az alábbi megfigyelés.

4.2.1. állítás. *A* 4.1.3. *tételben szereplő* (B1), (B2), (B3) *műveletek megőrzik egy digráf k-fenyő-összefüggőségét.*

Az 4.1.3. tételből az állítás segítségével rögtön megkapjuk Edmonds alapvető tételét.

4.2.2. tétel (Edmonds: gyenge alak, 1973). *Ha egy $D = (U, A)$ digráf valamely s gyökérre nézve k-élösszefüggő, úgy tartalmaz k élidegen s-gyökerű feszítő fenyőt.*

Mi történik, ha egy adott $T \subseteq V - s$ terminál halmazhoz keresünk k élidegen s-fenyőt, melyek mindegyike tartalmazza T minden pontját? Ehhez a $\varrho(X) \geq k$ egyenlőtlenséget nyilván minden T-t metsző $X \subseteq V - s$ halmazra meg kell követelni, és ez a feltétel a két szélső esetben, amikor $|T| = 1$, illetve $T = V - s$ elegendő is Menger, illetve Edmonds tételei alapján. Lovász példája mutatja, hogy általános T-re a vágás feltétel már $k = 2$-re sem elegendő (3. ábra).



3. ábra

Ez persze nem meglepő annak fényében, hogy két élidegen, T-t fedő s-fenyő létezésének kérdése NP-teljes, ugyanis a két élidegen út NP-teljes problémája egyszerűen visszavezethető rá. A 4.2.2. tétel fenti (leemelős) bizonyítási gondolatmenetének továbbfejlesztésével [2]-ben az Edmonds alábbi kiterjesztése mégiscsak lehetővé vált.

4.2.3. tétel (Bang-Jensen, Frank, Jackson, 1995). *Tegyük fel, hogy egy $D = (V, A)$ digráf valamely s gyökérpontjára és csúcsainak egy s-t nem tartalmazó $T \subset V$ részhalmazára nézve k-szor (s, T)-élösszefüggő, azaz létezik s-ből T minden pontjába k-élidegen út. Tegyük fel, hogy minden $v \in V - T - s$ csúcsra $\varrho(v) \geq \delta(v)$. Ekkor létezik k élidegen s-gyökerű fenyő, melyek mindegyike tartalmazza az egész T-t.*

Részpakolások folytatása

Edmonds valójában azt az általánosabb kérdést vizsgálta, amelyben a digráf csúcsainak adott k nemüres részhalmazáról kívánjuk eldönteni, hogy vajon k élidegen feszítő fenyves gyökér-halmaza-e. (Egy irányított erdőt akkor neveztünk fenyvesnek, ha minden pont befoka legfeljebb egy, azaz ha az erdő minden komponense fenyő. A 0 befokú pontok halmazát a fenyves **gyökér-halmazának** nevezzük. Egy $D = (V, A)$ irányított gráf **feszítő fenyvesén** olyan fenyvest értünk, amelynek ponthalmaza V, míg élhalmaza az A-nak része.)

Amikor mind a k halmaz az egypontú $\{s\}$, akkor kapjuk vissza a közös gyökerű feszítő fenyők problémáját. Kicsit szemléletesebb azonban ezt a fenyves-pakolási kérdést abban az ekvivalens alakban megfogalmazni, amelyben k darab előre adott élidegen s-gyökerű részfenyőt élidegen feszítő s-fenyőkké kiegészíteni. Ezt válaszolja meg az Edmonds tétel erős alakja.

4.2.4. tétel (Edmonds: erős alak, 1973). *A $D = (V, A)$ irányított gráfnak legyen s kijelölt gyökérpontja. Adott $F_1, \dots, F_k$ élidegen s-gyökerű D-beli fenyőt* (melyek élhalmaza lehet üres, de mindegyikük ponthalmaza tartalmazza s-t) *akkor és csak akkor lehet D-ben k páronként élidegen s-gyökerű feszítő fenyővé kiegészíteni, ha*

(4.2) $\qquad \varrho'(X) \geq p(X)$ *teljesül minden* $\emptyset \neq X \subseteq V - s$ *halmazra,*

ahol $\varrho'(X)$ jelöli az X-be lépő, az F_i-k által nem használt élek számát, míg $p(X)$ jelöli azon F_i fenyők számát, amelyekre $V(F_i) \cap X = \emptyset$.

A tételre Lovász [40] adott rövid, egyszerű bizonyítást, amely ráadásul, egy maximális folyamot kiszámító algoritmusra támaszkodva polinomiális algoritmussá alakítható. Edmonds az erős alakot valójában az alábbi ekvivalens formában igazolta.

4.2.5. tétel. *A $D = (V, A)$ irányított gráfban legyen $R_1, \dots, R_k$ a pontoknak k* (nem feltétlenül diszjunkt, vagy különböző) *részhalmaza. Akkor és csak akkor létezik D-nek k élidegen feszítő fenyvese, melyek gyökér-halmaza rendre $R_1, \dots, R_k$, ha bármely $\emptyset \neq Z \subset V$ részhalmazra a $\varrho(Z)$ befok legalább azon R_i halmazok száma, melyek diszjunktak Z-től.*

Mi történik, ha nem részfenyőket akarunk élidegen módon feszítő s-fenyőkké kiterjeszteni, hanem fenyveseket? A legegyszerűbb, $k = 1$ esetben könnyen belátható a következő tétel.

4.2.6. tétel. *Tegyük fel, hogy a $D = (V, A)$ digráfban van s gyökerű feszítő fenyő és s-be nem lép él. A digráf egy (V, B) fenyvese akkor és csak akkor egészíthető ki s gyökerű feszítő fenyővé, ha nincsen olyan $Z \subseteq V - s$ részhalmaz, amelybe egyrészt B-beli él nem lép be, másrészt minden Z-be lépő uv élre v-be lép B-beli él.*

Egyetlen fenyves kiegészítése fenyővé tehát könnyű feladat. Ha azonban egy helyett kettő fenyvest akarunk élidegen módon egy-egy s gyökerű feszítő fenyővé kiegészíteni, akkor a probléma NP-teljessé válik már abban az igen egyszerűen hangzó speciális esetben is, amikor az egyik fenyvesnek egyáltalán nincs éle és a másiknak is csak kettő van. Ennek segítségével ugyanis meg lehet oldani az irányított gráfra vonatkozó két élidegen út problémáját, amiről ismeretes, hogy NP-teljes, és ami abból áll, hogy egy digráfban s_i-ből t_i-be keresünk egy-egy élidegen utat $(i = 1, 2)$. A visszavezetés érdekében adjunk a digráfhoz egy új s pontot, egy új t pontot, s-ből s_i-be egy élt, t_i-ből t-be egy élt $(i = 1, 2)$, végül t-ből minden pontba két párhuzamos élt. Álljon F_1 az ss_1, t_1t élekből, míg F_2-nek nincs éle és egyetlen pontja s. Könnyen ellenőrizhető, hogy a kibővített digráfban akkor és csak akkor van két olyan élidegen s-gyökerű feszítő fenyő, melyek egyike tartalmazza F_1-t, másika pedig F_2-t, ha az eredeti digráfban létezik egy-egy élidegen út s_1-ből t_1-be, illetve s_2-ből t_2-be. Vagyis ha a fenyves kiegészítési problémát meg tudnánk polinom időben oldani, akkor a két élidegen út NP-teljes problémáját is.

Alkalmazás: élidegen utak

Edmonds tételéből rögtön kiolvasható az alábbi:

4.2.7. következmény. *Legyenek $\{s_i, t_i\}$ pontpárok egy k-élösszefüggő D digráfban. Ekkor léteznek élidegen s_it_i-utak ($i = 1, 2, \ldots, k$).*

Megjegyzendő, hogy a Következmény nem jön ki Menger tételéből.

4.2.2. Diszjunkt fák irányítatlan gráfban

A 3.4.4 irányítási tételt Edmonds 4.2.2. tételével összerakva, rögtön megkapjuk Tutte nevezetes tételét diszjunkt fák létezéséről.

4.2.8. tétel (Tutte, 1961). *Egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fa, ha G k-partíció-összefüggő, azaz $e(\mathcal{F}) \geq k(t-1)$ teljesül V minden $\mathcal{F} := \{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára.* ■

Megjegyezzük, hogy e tétel maga után vonja a 3.4.4 irányítási tételt, hiszen a k fát külön-külön könnyen megirányíthatjuk gyökeres fenyővé. Ugyanakkor Tutte tételének eredeti bizonyítása nehezebb, mint a fenti megközelítés, amely a fordított utat járta be: sem Edmonds diszjunkt fenyő tétele, sem pedig a 3.4.4 irányítási tétel bizonyítása nem különösképp nehéz. Miután mindkét tétel bizonyítása algoritmikus, ez a megközelítés egyúttal algoritmust is jelent a k élidegen feszítő fa, illetve az ezek nem-létezését igazoló hiányos partíció megkonstruálására.

Az a feladat, hogy miként lehet egy olyan minimális költségű részgráfot megtalálni, amely tartalmaz k élidegen feszítő fát, már matroidokat igényel, melyek segítségével ráadásul a következő még általánosabb probléma is kezelhetővé válik. Ha a gráf élhalmazán adottak a $c_1, \ldots, c_k$ költségfüggvény, hogyan lehet $F_1, \ldots, F_k$ élidegen feszítő fákat megkeresni úgy, hogy a $\sum c_i(F_i)$ össz-költség minimális legyen?

4.2.3. Szabad gyökerű fenyők pakolása

Mi a helyzet, ha a fenyők gyökerei nincsenek előre rögzítve, azaz mikor létezik a digráfban k élidegen feszítő fenyő? A kérdést általánosabb formában a [16] dolgozat válaszolta meg.

4.2.9. tétel. *Legyenek adottak $f : U \to \mathbf{Z}_+$ alsó és $g : U \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ felső korlátok, melyekre $f \leq g$. Egy $D = (U, A)$ irányított gráfban akkor és csak akkor létezik*

k páronként élidegen feszítő fenyő úgy, hogy mindegyik v csúcs közülük legalább $f(v)$-nek és legfeljebb $g(v)$-nek a gyökere, ha

$$f(U) \le k, \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{t} \varrho_D(X_i) \ge k(t-1) + f(X_0) \tag{4.4}$$

fennáll U minden olyan $\{X_0, X_1, \dots, X_t\}$ partíciójára, amelyben csak X_0 lehet üres, és

$$g(X) \ge k - \varrho_D(X) \text{ minden } X\text{-re, } \emptyset \subset X \subseteq U. \tag{4.5}$$

4.2.10. következmény. *Egy $D = (U, A)$ digráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fenyő, ha U minden $\{X_1, \dots, X_t\}$ rész-partíciójára $\sum_{i=1}^{t} \varrho_D(X_i) \ge k(t-1)$.* ■

A lánctulajdonság

A 4.2.9. tételből kiolvashatóan fenyőpakolásokra is érvényes a lánctulajdonság.

4.2.11. következmény. *Ha a $D = (U, A)$ digráfban létezik k élidegen feszítő fenyő úgy, hogy mindegyik v csúcs legfeljebb $g(v)$-nek gyökere, továbbá létezik k élidegen feszítő fenyő úgy, hogy mindegyik v csúcs legalább $f(v)$-nek gyökere, akkor úgy is létezik k élidegen feszítő fenyő, hogy mindegyik v csúcs legalább $f(v)$-nek és legfeljebb $g(v)$-nek gyökere.* ■

4.3. Fedések

Az Edmonds-tételből egyszerű konstrukció révén kapjuk a következőt.

4.3.1. tétel. *A $D = (V, A)$ digráf élhalmaza akkor és csak akkor fedhető le k fenyvessel, ha* (i) *minden pont befoka legfeljebb k, és* (ii) *$i(X) \le k(|X| - 1)$ teljesül minden $X \subseteq V$ halmazra, ahol $i(X)$ jelöli az X által feszített élek számát.*

Érdekes az alábbi következmény.

4.3.2. következmény. *Ha egy párhuzamos élt és hurkot nem tartalmazó digráfban minden pont befoka legfeljebb K, akkor az élhalmaz lefedhető $K + 1$ fenyvessel.*

4.3.1. Fedés fákkal

Az irányítások hasznát jól szemlélteti az alábbi irányítatlan gráfokra vonatkozó nevezetes tétel bizonyítása.

4.3.3. tétel (Nash-Williams, 1964). *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élhalmaza akkor és csak akkor fedhető le k erdővel, ha minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ részhalmazra*

$$i_G(X) \leq k\big(|X| - 1\big). \tag{4.6}$$

Bizonyítás. A 3.1.7. tétel szerint $G = (V, E)$-nek akkor és csak akkor van olyan irányítása, amelyben minden pont befoka legfeljebb k, ha $i_G(X) \leq k|X|$ teljesül minden $X \subseteq V$-re. Így a tétel feltételéből következik ilyen irányítás létezése, és ezért a 4.3.1. tételt alkalmazhatjuk. ■

Tehát Nash-Williams tételének bizonyításához szükségünk volt az 4.3.1. tételre, ami az Edmonds féle diszjunkt fenyő tétel közvetlen folyománya volt és a Hakimi féle irányítási tételre.

Érvényes a Nash-Williams-tétel alábbi általánosítása.

4.3.4. tétel. *Egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráfban adott k darab részfa: $T_1 = (V_1, F_1), \ldots, T_k = (V_k, F_k)$, melyek F_i élhalmaza lehet üres, de a V_i csúcshalmaz nem. Jelölje $F := \cup F_i$. A T_i fákat akkor és csak akkor lehet kiegészíteni $E - F$ éleiből olyan feszítő fákká, melyek uniója E, ha minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ részhalmazra*

$$i_{E-F}(X) \leq \sum b_i(X), \tag{4.7}$$

ahol $b_i(X) := |X - V_i|$, ha $X \cap V_i \neq \emptyset$ és $b_i(X) := |X| - 1$, ha $X \cap V_i = \emptyset$, vagyis a $b_i(X)$ szám azt mutatja, hogy a T_i fa egy kiegészítése maximum hány X által feszített $E - F$-beli élt tartalmazhat.

4.3.2. Fedés fenyőkkel

Vizsgáljuk meg, mi a helyzet, ha fenyők pakolása helyett a fenyőkkel fedni szeretnénk az éleket. Egy $D = (V, A)$ digráf pontjainak bármely $X \subseteq V$ részhalmazához jelölje $B(X) := \{v \in X\colon$ létezik olyan $uv \in A$ él, amelyre $u \in V - X\}$ az X halmaz **bejáratát**. Ez tehát azon X-beli pontokból áll, melyekbe vezet X-en kívülről él. A következő eredmény, amely az Edmonds tétel egyfajta fedési ellenpárjának tekinthető, egyszerű konstrukció segítségével levezethető az Edmonds tételből.

4.3.5. tétel (Vidyasankar, 1978). *Legyen s a $D = (V, A)$ digráf egy kijelölt pontja, amibe nem lép be él. D éleit akkor és csak akkor lehet k darab s-gyökerű feszítő fenyővel lefedni, ha* (i) *minden $v \in V - s$ pontra $\varrho(v) \leq k$, és* (ii) *minden $X \subseteq V - s$ halmazra*

$$k - \varrho(X) \leq \sum \big[k - \varrho(v) : v \in B(X)\big], \tag{4.8}$$

ahol $B(X)$ az X bejáratát jelöli.

5. Összefüggőségi tulajdonságok kialakítása és megőrzése

5.1. Növelési és részgráf problémák kapcsolata

A részgráf problémában egy adott tulajdonságú (például összefüggő) gráf minimális ilyen részgráfját kerestük. A növelési problémában a kiindulási gráfnak nincs meg a kívánt tulajdonsága és bizonyos műveletek segítségével szeretnénk elérni, hogy meglegyen. Ez a művelet lehet egy új él (vagy csúcs, esetleg hiperél) hozzáadása, de egyéb műveletek is érdekesek: például élösszefüggőség esetén két csúcs összehúzása vagy egy irányított él irányának a megfordítása.

A növelési és részgráf problémák szoros kapcsolatban vannak egymással. Tegyük például fel, hogy a növelési problémában egy $G = (V, E)$ nem összefüggő gráfot szeretnénk azzá tenni minimális össz-költségű új él hozzávételével. Jelölje a lehetséges új élek gráfját $H = (V, F)$ (amelyre $(V, E + F)$ összefüggő) és legyen $c : F \to \mathbf{R}$ a költségfüggvény. A megoldás egyszerű: terjesszük ki a c költségfüggvényt a $G + H$ gráfra úgy, hogy minden E-beli e élen $c(e) = 0$, majd a Kruskal algoritmussal keressünk $G + H$-ban minimális költségű feszítő fát. Ennek H-beli élei definiálják a keresett minimális növelő élhalmazt.

Ez a fajta visszavezetés minden olyan esetben működik, amikor a minimális költségű részgráf probléma kezelhető. Így például az 1.5. szakaszban ismertetett Ford-Fulkerson féle költséges folyamalgoritmus segítségével algoritmikusan megoldható az a növelési probléma, amikor a digráfban nincsen k élidegen st-út, és minimális össz-költségű új él hozzávételével szeretnénk elérni, hogy legyen. (A speciális $k = 1$ esetben elég Dijkstra algorimusa.) Analóg módon, az 1.2.2. szakaszban vázolt Chu és Liu féle algoritmus minimális költségű feszítő s-fenyő kiszámítására használható a minimális költségű növelés megoldására, ha a megnövelt digráfban minden csúcs s-ből való elérhetősége az elérendő cél.

Megfordítva is, amennyiben egy minimális költségű növelési probléma megoldható, akkor egy G gráf minimális költségű részgráfjának problémája is, hiszen ez utóbbi felfogható úgy, hogy az élmentes gráfot akarjuk növelni G éleinek felhasználásával.

Ez az ekvivalencia abban az értelemben áll fenn, hogy a részgráf feladat pontosan akkor oldható meg minden nemnegatív költségfüggvényre, amikor a megfelelő növelési feladat. Kiderül azonban, hogy vannak olyan tulajdonságok is, amikor az optimális részgráf probléma NP-teljes, míg a megfelelő növelési feladat szépen kezelhető, legalábbis szabad növelések esetén. Akkor beszélünk **szabad** növelésről, ha a kiindulási (di)gráfhoz a csúcshalmazának bármely két pontját összekötő él, akárhány példányban a (di)gráfhoz adható, továbbá minden él költsége egy.

5.2. Globális élösszefüggőség irányítatlan gráfban

Tekintsük azt a növelési problémát, amelyben a kiindulási $G = (V, E)$ gráfot k-élösszefüggővé akarjuk tenni ($k \geq 2$) egy $H = (V, F)$ gráfból választott minimális össz-költségű új él hozzávételével. Kezdjük a $k = 2$ speciális esettel.

5.2.1. 2-élösszefüggővé növelés

Igazolható, hogy a feladat NP-teljes már abban a speciális esetben is, amikor G fa és a költségfüggvény H élein azonosan 1, vagyis amikor egy (V, E) fát kell minimális számú H-beli él hozzáadásával 2-élöszefüggővé tenni. Ugyanakkor Eswaran és Tarjan [13] kimutatta, hogy szabad növelés esetén tetszőleges kiindulási gráfra a minimális élszámú 2-élösszefüggővé növelés problémája megoldható. A G gráf pontjainak egy nemüres U részhalmazát nevezzük **2-tömörnek**, ha U 2-élösszefüggő gráfot feszít és az U foka kisebb, mint 2. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 2-tömör halmazok páronként diszjunktak. Ezek közül jelölje t_0 a 0-fokúak számát (vagyis ez G azon komponenseinek száma, melyek 2-élösszefüggőek), míg t_1 legyen az 1 fokú 2-tömör halmazok száma.

5.2.1. tétel (Eswaran és Tarjan, 1976). *Egy $G = (V, E)$ nem 2-élösszefüggő irányítatlan gráf 2-élösszefüggővé növeléséhez szükséges új élek minimális γ száma $t_0 + \lceil t_1/2 \rceil$.*

Bizonyítás. Ha egy 2-tömör halmazt összehúzunk egy ponttá, akkor sem a t_0, t_1 értékek, sem a minimális γ nem változik, így feltehetjük, hogy minden 2-tömör halmaz egypontú, azaz G erdő. Ekkor t_0 az erdő egypontú komponenseinek a számával egyenlő, míg t_1 az elsőfokú pontjainak számával.

Egy 2-élösszefüggő növelésben minden 0 fokú csúcs legalább 2 új éllel szomszédos és minden 1 fokú csúcs legalább 1-gyel, így legalább $t_0 + \lceil t_1/2 \rceil$ új élnek kell lennie.

Annak kimutatásához, hogy ennyi él elegendő is, tegyük fel először, hogy G nem összefüggő. Legyen u és v két legfeljebb első fokú pont, melyek nem egy komponensben vannak. Az uv élt a gráfhoz adva a megfelelő $t_0 + \lceil t_1/2 \rceil$ érték pontosan eggyel csökken, így indukcióval kész vagyunk.

Feltehetjük tehát, hogy G fa (és így $t_0 = 0$), melynek legalább 2 pontja van (és így $t_1 \geq 2$). Amennyiben $t_1 = 2$, úgy a fa egy út, melynek két végét egy új éllel összekötve 2-élösszefüggő gráfot kapunk. Ha $t_1 = 3$, úgy a fa egy pontból kiinduló 3 (amúgy diszjunkt) út, melyek $\{a, b, c\}$ végpontjai közé betéve az ab és ac új éleket 2-élösszefüggő gráfot kapunk.

Így tehát $t_1 \geq 4$. Ekkor a fában van olyan P út, amely két első fokú pontot köt össze és P-ből legalább két él lép ki (például egy legalább negyedfokú ponton átmenő maximális, vagy két harmadfokú ponton átmenő maximális út megteszi.) A fához adva az út két végpontját összekötő élt a t_0 érték továbbra is 0 marad, míg a t_1 érték kettővel csökken, hiszen a keletkező C kör biztosan nem lesz 2-tömör, mert P választása miatt a foka legalább 2. Vagyis a $t_0 + \lceil t_1/2 \rceil$ szám az él hozzáadásával eggyel csökken és indukcióval kész vagyunk. ■

5.2.2. k-élösszefüggővé növelés

Miként általánosítható a fenti eredmény, ha a növeléssel magasabb élösszefüggőség elérése a cél? Bár az 5.2.1. tétel bizonyítása igazán egyszerű, ahhoz azonban némileg vacakolós, hogy az általános k-élösszefüggőségre növelést ezen az úton kezelni lehessen. Ezért egy gyökeresen különböző megközelítésre van szükség. A trükk az, hogy a minimális növelési feladat közvetlen megoldása elé egy segédfeladatot iktatunk be, amelyben a növelő gráfnak a fokszámait írjuk elő, és csak ezt követően nézzük meg, hogy miként lehet egy minimális realizálható fokszám-sorozatot találni.

Fokszám-előírt növelés

Tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf nem k-élösszefüggő. Adott az $m : V \to \mathbf{Z}_+$ fokszám-előírás és egy olyan $H = (V, F)$ gráfot keresünk, melyre $G + H$ k-élösszefüggő és $d_H(v) = m(v)$ minden v csúcsra. A következő eredmény [20] azon az egyszerű, de hatékonynak bizonyuló észrevételen múlik, hogy a fokszám-előírt növelési probléma valójában ekvivalens Lovász 2.1.3 leemelési tételével.

5.2.2. tétel. *Adott $G = (V, E)$ gráf, $k \geq 2$ egész, és $m : V \to \mathbf{Z}_+$ fokszám-előírás. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ gráf, amelyre $d_H(v) = m(v)$ teljesül minden $v \in V$ pontra és $G + H$ k-élösszefüggő, ha $m(V)$ páros és*

$$m(X) \geq k - d_G(X) \tag{5.1}$$

teljesül minden $\emptyset \neq X \subset V$ részhalmazra, ahol $m(X) := \sum [m(v) : v \in X]$.

Minimális növelés

A kérdésre, hogy minimum hány él hozzávételével tehető egy gráf k-élösszefüggővé a választ Watanabe és Nakamura [53] adta meg. Ennek eredeti bizonyítása igen hosszadalmas, de az 5.2.2. tétel közbeiktatásával a tétel néhány sorban levezethető [20]. Nemüres diszjunkt halmazoknak egy rendszerét részpartíciónak neveztük.

5.2.3. tétel (Watanabe és Nakamura, 1987). *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ új él hozzáadásával k-élösszefüggővé ($k \geq 2$), ha a pontok minden $\{X_1, \dots, X_t\}$ részpartíciójára*

$$2\gamma \geq \sum_i [k - d(X_i)]. \tag{5.2}$$

Másszóval, azon élek minimális száma, melyeknek G-hez adása k-élösszefüggő gráfot eredményez, egyenlő a $\max \lceil \sum_i (k - d(X_i)/2 \rceil$ értékkel, ahol a maximum a V összes részpartíciójára megy.

Megjegyzendő, hogy Watanabe és Nakamura tétele $k = 1$-re nem érvényes. A tétel bizonyítása [20]-ben egyúttal polinomiális algoritmust is szolgáltat a minimális növelés megkeresésére.

A k-élösszefüggőség általánosításaként a 3.4. szakaszban bevezettük a (k, l)-partíció-összefüggőség fogalmát ($0 \leq l \leq k$), ahol minden t-részes partíció keresztélei számának kellett legalább $k(t - 1) + l$-nek lennie. A minimális költségű (k, l)-partíció-összefüggő részgráf keresésének problémája az $l = 0$ esettől eltekintve NP-teljes. A $(k, 0)$-partíció összefüggőség Tutte tétele nyomán épp a k élidegen fa létezésével ekvivalens.

Természetesen adódik a kérdés, hogy az $1 \le l \le k$ esetben legkevesebb hány új él hozzáadásával tehető egy gráf (k, l)-partíció összefüggővé. A válaszhoz általánosabb eszközök szükségesek, így azt a II. részre hagyjuk.

5.3. Lokális élösszefüggőség irányítatlan gráfban

Lovász leemelési tétele a k-élösszefüggőség megőrzéséről szólt, míg a Watanabe-Nakamura tétel az élösszefüggőség minimális számú éllel való növeléséről. Ezen eredményeket általánosíthatjuk arra az esetre, amikor az egyes pontpárok közötti „lokális" élösszefüggőségre más és más előírásunk lehet.

5.3.1. A lokális élösszefüggőség megőrzése

Legyen $G = (V + z, E)$ irányítatlan összefüggő gráf, amelyben $\lambda(u, v) = \lambda(u, v; G)$ jelöli az u, v pontpárt elválasztó minimális vágás elemszámát, ami Menger tétele alapján az u-t és v-t összekötő élidegen utak maximális száma. E számot az u és v **lokális élösszefüggőségé**nek hívják. Egy élpárt **leemelhető**nek mondunk, ha a két él közös vége a z pont és leemelésük minden $u, v \in V$ pontpár lokális élösszefüggőségét megőrzi.

Mader [45] megadta, hogy mikor létezik leemelhető élpár. Feltesszük, hogy V-nek legalább két pontja van és z szomszédjai között a lokális élösszefüggőség legalább 2. Ez utóbbi azzal ekvivalens, hogy:

(5.3) nincs z-ből induló elvágó él.

5.3.1. tétel (Mader, 1978). *Legyen $G = (V + z, E)$ összefüggő irányítatlan gráf, amelyben $d(z) \neq 3$ és (5.3) teljesül. Ekkor létezik leemelhető élpár.*

A tételnek a következő ekvivalens alakjára viszonylag egyszerű bizonyítás található [25]-ben.

5.3.2. tétel (Mader). *Legyen $G = (V + z, E)$ összefüggő irányítatlan gráf, amelyben $d(z)$ páros és (5.3) teljesül. Ekkor a z-ből kiinduló élek $d(z)/2$ párba állíthatók úgy, hogy e párokat egymás után leemelve a lokális élösszefüggőségek nem csökkennek.*

5.3.2. A lokális élösszefüggés növelése

Mader tétele felhasználható a lokális élösszefüggőség optimális növelésére. E célból legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $r(x, y)$ $(x, y \in V)$ nemnegatív egészértékű függvény, amely szimmetrikus, azaz $r(x, y) = r(y, x)$. Adott továbbá egy $m : V \to Z_+$ függvény, amelyre $m(V)$ páros. Feltesszük, hogy

(5.4) G-nek nincsen olyan C komponense, amelyre $m(C) = 1$.

A következő eredmény lényegében Mader tételének átfogalmazása.

5.3.3. tétel. *Akkor és csak akkor létezik olyan* $H = (V, F)$ *gráf, amelyre*

$$d_H(v) = m(v) \tag{5.5}$$

minden $v \in V$*-re fennáll és*

$$\lambda(x, y; G^+) \geq r(x, y) \tag{5.6}$$

teljesül minden x, y *pontpárra, ahol* $G^+ = G + H = (V, E \cup F)$, *ha*

$$m(X) \geq R_r(X) - d_G(X) \tag{5.7}$$

érvényes minden $X \subseteq V$ *részhalmazra, ahol* $R_r(X) := \max\{r(x, y) : x \in X,\ y \in V - X\}$.

Ebből levezethető a minimális élszámú növelésre vonatkozó tétel. Azt mondjuk, hogy a G gráf valamely C komponense **marginális** (r-re nézve), ha $R_r(C) \leq 1$.

5.3.4. tétel [20]. *Tegyük fel G-nek nincs marginális komponense. Akkor és csak akkor létezik olyan legfeljebb* γ *élű* $H = (V, F)$ *gráf, amelyre* $\lambda(x, y; G^+) \geq r(x, y)$ *teljesül minden* x, y *pontpárra, ahol* $G^+ = G + H = (V, E \cup F)$, *ha*

$$\sum [R_r(X_i) - d_G(X_i)] \leq 2\gamma \tag{5.8}$$

teljesül V *minden* $\{X_1, \ldots, X_t\}$ *rész-partíciójára.*

A bizonyítás gondolatmenetét jelentősen továbbfejlesztve Jordán és Szigeti [33] Mader tételének nagymérvű általánosítását adta.

5.3.5. tétel (Jordán és Szigeti). *Legyen* $G = (V + z, E)$ *2-élösszefüggő gráf, amelyben* z *egy kijelölt pont. Legyenek* $d_1, \ldots, d_p$ *egészek* ($p \geq 2$), *melyekre* $d_i \geq 2$ *és* $\sum d_i = d_G(z)$. *Adott továbbá egy szimmetrikus* $r(u, v)$ *függvény* ($u, v \in V$) *a pontpárokon. A* z *csúcs pontosan akkor szedhető szét* p *csúcsba úgy, hogy a* p *csúcs foka rendre* $d_1, \ldots, d_p$, *és a keletkező* G' *gráfban minden* $\{u, v\}$ *csúcspár lokális élösszefüggőségre* $\lambda(u, v; G') \geq r(u, v)$, *ha* $r(u, v) \leq \lambda(u, v; G)$ *és* $\lambda(u, v; G - z) \geq r(u, v) - \sum_{i=1}^{p} \lfloor d_i/2 \rfloor$ *minden* $\{u, v\}$ *csúcspárra érvényes.*

5.4. Irányított gráfok összefüggőségének növelése

5.4.1. Erősen összefüggővé növelés

A $D = (V, A)$ irányított gráfot szeretnénk erősen összefüggővé tenné minimális összköltségű új él hozzávételével. Jelölje $H = (V, F)$ a lehetséges új élek digráfját, amelyről feltesszük, hogy $D + H = (V, A + F)$ erősen összefüggő, és legyen $c : F \to \mathbf{R}$ a költségfüggvény. A feladat NP-teljes már abban a speciális esetben is, amikor D-nek egyáltalán nincs éle és c azonosan 1, ilyenkor ugyanis az optimum értéke pontosan akkor n (a csúcsok száma), ha H tartalmaz Hamilton kört.

Van azonban két fontos speciális eset, amikor a minimális élszámú növelésre kerek válasz adható. Az elsőben bármilyen új él használható, a másodikban pedig H-ban csak olyan uv élek fordulhatna elő, melyekre v-ből u elérhető D-ben. Ezen utóbbi kérdésre valójában Lucchesi és Younger 2.2.3. tétele már meg is adta a választ.

Szabad növelés

Egy digráf erősen összefüggő komponenseit egy pontra húzzuk, aciklikus digráfot kapunk. Egy erősen összefüggő komponensre azt mondjuk, hogy **forrás-komponens**, ha nem lép bele él és **nyelő-komponens**, ha nem lép ki belőle él. Az előbbiek számát jelöje c_f, az utóbbiakét c_n.

5.4.1. tétel (Eswaran és Tarjan, 1976). *Egy $D = (V, A)$ nem erősen összefüggő irányított gráf erősen összefüggővé növeléséhez szükséges új élek minimális γ száma* $\max\{c_f, c_n\}$.

Bizonyítás. Mivel minden forrás-komponensbe kell új élnek belépnie és minden nyelő-komponensből kell új élnek kilépnie, ezért $\gamma \geq c_f$ és $\gamma \geq c_n$. Egy erősen összefüggő komponens egy pontra húzásával sem a min sem a max értéke nem változik, így elég a tételt aciklikus digráfokra igazolni. Feltehető, hogy nincs izolált pont. Valóban egy v izolált pontot szétnyithatunk egy éllé azaz helyettesíthetjük egy vv' irányított éllel, ahol v' új pont. Ezáltal sem a min, sem a max értéke nem változik.

Ha egy t nyelőpont nem érhető el valamely s forráspontból, akkor a digráf az új ts él hozzáadásával aciklikus marad, és mivel a max értéke eggyel csökkent, indukcióval készen vagyunk. Feltehetetjük tehát, hogy minden nyelőpont elérhető minden forráspontból. Egyszerűbb jelölés végett legyen $k := c_f$ és $l = c_n$, Legyenek a forráspontok $s_1, \ldots, s_k$, míg a nyelőpontok $t_1, \ldots, t_l$. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy $k \leq l$. Ekkor a digráfhoz adva az összesen l darab $t_1s_1, \ldots, t_ks_k$ valamint a $t_{k+1}s_1, t_{k+2}s_1, \ldots, t_ls_1$ élt erősen összefüggő digráfot kapunk. ■

5.4.2. k-élösszefüggővé növelés

Az általános k-élösszefüggőség növelési feladatban egy $D = (U, A)$ irányított gráfot szeretnénk minimális számú új él hozzáadásával k-élösszefüggővé tenni. A megoldásához az irányítatlan gráfoknál megadott utat követjük.

Fokszám-előírt növelés

Az alapészrevétel [20] az az egyszerű megfigyelés, hogy a fokszám-előírt irányított növelés problémája ekvivalens Mader 2.1.6 irányított leemelési tételével.

5.4.2. tétel. *Adott $D = (U, A)$ digráf és $m_{\mathrm{be}} : U \to \mathbf{Z}_+$, $m_{\mathrm{ki}} : U \to \mathbf{Z}_+$ fokszám-előírások. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (U, F)$ digráf, amelyre $\varrho_H(v) = m_{\mathrm{be}}(v)$ és $\delta_H(v) = m_{\mathrm{ki}}(v)$ teljesül minden $v \in U$ pontra és $D + H$ k-élösszefüggő, ha $m_{\mathrm{be}}(U) = m_{\mathrm{ki}}(U)$,*

$$m_{\mathrm{be}}(X) \geq k - \varrho_D(X) \tag{5.9}$$

és

$$m_{\text{ki}}(X) \geq k - \delta_D(X) \tag{5.10}$$

teljesül minden $\emptyset \neq X \subset U$ részhalmazra.

Erre támaszkodva levezethető a minimális növelésre vonatkozó tétel.

5.4.3. tétel [20]. *Egy $D = (U, A)$ irányított gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ új él hozzáadásával k-élösszefüggővé, ha a pontok minden $\{X_1, \ldots, X_t\}$ rész-partíciójára*

$$\gamma \geq \sum_i [k - \varrho(X_i)] \tag{5.11}$$

és

$$\gamma \geq \sum_i [k - \delta(X_i)]. \tag{5.12}$$

A k-élösszefüggőség általánosításaként a 3.4. szakaszban bevezettük a (k, l)-élösszefüggőség fogalmát. Egy digráf (k, l)-élösszefüggővé növelésének kérdésére a választ a II. részben ismertetendő „absztrakt" növelési eredmény tartalmazza.

5.4.3. Lokális élösszefüggőség digráfban

Az irányítatlan esetben a szabad növelési problémát akkor is meg tudtuk oldani, amikor különböző pontpárokra eltérő összefüggőségi elvárások voltak kitűzve. Irányított gráfoknál rosszabb a helyzet. Ha például a digráf pontjainak adott két nemüres, S és T részhalmaza, érdeklődhetünk olyan minimális növelés iránt, amelyben T minden pontja elérhető S minden pontjából. Ez általánosítja az erősen összefüggővé tevést ($S = T = V$). Sajnos túlságosan is, mert a probléma már akkor is NP-teljes, ha $S = T$ vagy ha $|S| = 1$. Ugyanakkor, ha a növeléshez csak ST-éleket engedünk meg, akkor a problémának még az ST k-élösszefüggőségre vonatkozó általánosítása is jellemezhető. Egy (nem hurok) élre akkor mondjuk, hogy ST-**él**, ha a töve S-ben a feje pedig T-ben van.

Egy digráfot akkor nevezünk ST k-élösszefüggőnek, ha S minden pontjából vezet k élidegen út T minden pontjába. (Ez erősebb annál, mintha csak azt kívánnánk, hogy az S halmazból vezessen k élidegen út a T-be).

Csúcsok egy X részhalmazát nevezzük **lényeges**nek, ha $X \cap T \neq \emptyset$ és $S - X \neq \emptyset$, ami azzal ekvivalens, hogy létezik X-be lépő ST-él. Halmazok egy $\mathcal{I}$ családja ST-**független,** ha bármely két X, Y tagjára az $X \cap Y \cap T$ és $S - (X \cup Y)$ halmazok közül legalább az egyik üres. Ez azzal ekvivalens, hogy nem létezik ST-él, amely mind X-be, mind Y-ba belép.

Menger tételéből következik, hogy egy D^+ digráf akkor és csak akkor ST k-élösszefüggő, ha minden lényeges halmaz befoka legalább k. A kiindulási $D = (V, A)$ digráfban definiáljuk egy $X \subseteq V$ részhalmaz $h(X)$ hiányát úgy, hogy $h(X) :=$

$(k - \varrho_D(X))^+$, ha X lényeges, és $h(X) := 0$ különben. Kapjuk, hogy ST-élek egy F halmazának a D-hez adása pontosan akkor eredményez ST k-élösszefüggő digráfot, ha $\varrho_F(X) \geq h(X)$ minden $X \subseteq V$-re teljesül, röviden F **fedi** h-t. A kikeresztezési technikát használva kaphatjuk meg a következőt.

5.4.4. tétel [21]. *A $D = (V, A)$ digráfot ST k-élösszefüggővé tevő* (vagyis a h-t fedő) *új ST-élek minimális $\tau_h = \tau_h(D)$ száma egyenlő az ST-független halmazok maximális $\nu_h = \nu_h(D)$ h-összegével.*

Nem nehéz ellenőrizni, hogy az $S = T = V$ esetben ST-független halmazok egy tetszőleges rendszere vagy páronként diszjunkt vagy páronként ko-diszjunkt halmazokból áll, és ezért a 5.4.4. tétel valóban visszadja a 5.4.3. tételt. Ugyanakkor a 5.4.4. tétel bizonyítása nem algoritmikus szemben a 5.4.3. tételével.

5.4.4. Digráfok pontösszefüggőségének növelése

Az ST k-élösszefüggőség nemcsak azért hasznos, mert általánosítja a k-élösszefüggőséget, hanem mert segítségével az irányított gráfok pontösszefüggőségének növelési problémája is kezelhetővé válik, ami például az irányítatlan esetben mindmáig megoldatlan.

Legyen $H = (V, J)$ irányított gráf. Egy $X = (X_K, X_B)$ párt **párhalmaz**nak hívunk, ha $\emptyset \subseteq X_B \subseteq X_K \subseteq V$, amely **nemtriviális**, ha $\emptyset \neq X_B$ és $X_K \neq V$. X_K a párhalmaz **külső** tagja, míg X_B a **belső.** A párhalmaz **egyirányú** (H-ra nézve), ha nincs H-nak X-t **fedő** éle, azaz olyan él, amely a párhalmaz mindkét tagjába belép. Éleknek egy F halmazára $\varrho_F(X)$ jelöli a X-t fedők számát. Két párhalmaz **független**, ha vagy a belsejük diszjunkt vagy a külsejük uniója V, vagyis ha egy éllel nem lehet mindkettőt fedni.

Egy $D^+ = (V, A^+)$ digráfot akkor neveztünk k-összefüggőnek, ha $|V| \geq k + 1$ és bárhogy is kihagyva legfeljebb $k - 1$ pontot a maradék digráf erősen összefüggő. Ez azzal ekvivalens, hogy bármely nemtriviális egyirányú párhalmazra $|X_K| - |X_B| \geq k$.

Tegyük most fel, hogy a $D = (V, A)$ digráf nem k-összefüggő és új élek hozzáadásával szeretnénk azzá tenni. Egy $X = (X_K, X_B)$ nemtriviális egyirányú párhalmaz hiányát definiáljuk a

$$h_D(X) := \big(k - (|X_K| - |X_B|)\big)^+ \tag{5.13}$$

értékkel.

5.4.5. tétel (Frank és Jordán, 1995). *A $D = (V, A)$ irányított gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ új él hozzáadásával k-összefüggővé, ha*

$$\sum_{X \in \mathcal{F}} h_D(X) \leq \gamma$$

fennáll minden egyirányú független párhalmazokból álló $\mathcal{F}$ rendszerre.

6. Jelölések, definíciók

Legyen $H = (V, F)$ irányított vagy irányítatlan gráf, melynek V a csúcs- és F az élhalmaza. **Sétán** egy olyan $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ sorozatot értünk, amelyben felváltva következnek H-beli pontok és élek, és mindegyik e_i él a v_{i-1} pontból vezet a v_i pontba. A séta **zárt**, ha $v_0 = v_k$. A szereplő élek száma a séta **hossza**. A legkisebb élszámú H-beli st-út hossza a t pont **távolsága** s-től. Azt mondjuk, hogy v_0 a séta kezdőpontja, míg v_k a séta végpontja. A séta **kör**, ha $v_1 = v_k$, és más ismétlődés nincsen. Egy minden élt pontosan egyszer használó zárt séta neve **Euler-séta** vagy **Euler-bejárás**. Amennyiben a sétában nincs ismétlődés, **út**ról beszélünk. (Digráf esetén a hangsúly kedvéért néha kitesszük az irányított jelzőt: irányított út, irányított kör, irányított Euler-séta). Egy digráf **aciklikus**, ha nem tartalmaz irányított kört. A teljes gráf éleinek megirányításával keletkező irányított gráf neve **turnament**.

Egy G irányítatlan gráf ponthalmazán az egy úton levés ekvivalencia reláció. Ennek osztályai által feszített részgráfok a gráf (összefüggő) **komponensei**. G **összefüggő**, ha bármely két pontja között vezet út, ami azzal ekvivalens, hogy G csúcsainak minden $X \subset V$ nemüres részhalmazára X és $V - X$ között vezet él. A gráf k-**élösszefüggő**, ha G-nek bárhogy kihagyva legfeljebb $k-1$ élét még mindig összefüggő gráfot kapunk, ami azzal egyenértékű, hogy minden $X \subset V$ nemüres halmazra X és $V - X$ között vezet legalább k él. **Párosítás**on egy olyan gráfot értünk, amelyben minden pont foka legfeljebb egy, **teljes párosítás**nál pedig pontosan egy.

A H irányított vagy irányítatlan gráfról azt mondjuk, hogy k-**pontösszefüggő** vagy röviden k-**összefüggő**, ha legalább $k+1$ csúcsa van és bárhogy kihagyva legfeljebb $k-1$ csúcsot az irányított esetben erősen összefüggő digráfot, míg az irányítatlanban összefüggő gráfot kapunk.

Az irányított $D = (V, A)$ digráf **gyökeresen** k-**összefüggő** (s-re nézve), ha legalább $k+1$ csúcsa van és bárhogy kihagyva legfeljebb $k-1$ darab s-től különböző pontját gyökeresen összefüggő digráfot kapunk.

Könnyen látható, hogy egy D digráf ponthalmazán a kölcsönös elérhetőség ekvivalencia reláció. Ennek osztályai által feszített részgráfok a digráf **erősen összefüggő komponens**ei. Ezek mindegyikét egy-egy pontra összehúzva aciklikus digráfot kapunk. A digráfot akkor nevezik **erősen összefüggő**nek, ha bármely pontjából bámely másikba vezet út, és akkor s-**re nézve gyökeresen összefüggő**nek, ha valamely s csúcsából minden más csúcsba vezet út.

A digráf (**gyökeresen**) k-**élösszefüggő**, ha bárhogy kihagyva legfeljebb $k-1$ élét a maradék (gyökeresen) erősen összefüggő, ami azzal ekvivalens, hogy minden $X \subset V$ (illetve a gyökeres esetben $X \subseteq V - s$) nemüres halmazra legalább k él vezet $V - X$-ből X-be. Általánosabban, a D digráf csúcsainak valamely S és T részhalmaza esetén azt mondjuk, hogy D ST k-**élösszefüggő**, ha minden olyan $X \subset V$ halmaz befoka legalább k, amelyre $S - X$ és $X \cap T$ nemüres. Egy irányított és irányítatlan élekből álló **vegyes gráf**ot akkor nevezünk k-élösszefüggőnek, ha minden irányítatlan élét két ellentétesen irányított párhuzamos élre cserélve k-élösszefüggő digráfot kapunk.

Egy $H = (V, F)$ irányított vagy irányítatlan gráfról azt mondjuk, hogy **k-pontösszefüggő** vagy röviden **k-összefüggő**, ha legalább $k+1$ csúcsa van és minden csúcsából bármely másikba vezet k darab belsőleg (azaz végpontjaitól eltekintve) diszjunkt út. $D = (V, A)$ digráf **gyökeresen k-összefüggő** (s-re nézve), ha egy kijelölt s csúcsából mindegyik más csúcsba vezet k belsőleg diszjunkt út. A $H = (V, F)$ (di)gráfban jelölje az s-ből t-be vezető élidegen utak maximális számát $\lambda(s,t) = \lambda(s,t;H)$, míg a belsőleg pontidegen utakét $\kappa(s,t) = \kappa(s,t;H)$.

Egy körmentes gráf neve **erdő**, míg a **fa** egy összefüggő erdő. Látszik, hogy a fa élelhagyásra nézve minimális összefüggő gráf, továbbá hogy egy fa felépíthető egy pontjából kiindulva új élek egymás utáni hozzávételével úgy, hogy a soron következő él egyik végpontja már meglévő pont, míg a másik új. Egy olyan $F = (S, E)$ irányított fát, amelynek minden pontja elérhető irányított úton s-ből **s-fenyő**nek nevezünk. Azt mondjuk, hogy F feszíti S-t. Ha a fenyő részgráfja D-nek és az egész V halmazt tartalmazza, **feszítő** s-fenyőről beszélünk. **Fenyves**nek hívunk egy olyan irányított erdőt, melynek komponensei fenyők. Ellenőrizhető, hogy irányított fa akkor és csak akkor s-fenyő, ha az $s \in S$ pont befoka nulla a többi ponté pedig egy. Hasonlóan könnyen látszik, hogy egy s-et tartalmazó digráf pontosan akkor s-fenyő, ha az s pontból kiindulva elő lehet irányított élek egyenkénti hozzávételével állítani úgy, hogy az aktuálisan hozzáadott él feje új pont, míg a töve már meglévő.

$G = (V, E)$ irányítatlan gráfban egy $X \subset V$ csúcshalmaz és $V - X$ komplementere között vezető élek halmazát **vágás**nak nevezik, mely **elemi,** ha mind X, mind $V - X$ összefüggő gráfot feszít. A vágásban lévő élek számát $d(X) = d_G(X) = d_E(X)$ valamelyikével jelöljük: $d(X)$ az X halmaz **foka**. Egy v csúcs $d(v)$ **foka** a v-ben végződő élek száma, ahol a v-n ülő hurokélek kétszer számítanak. Tehát $d(v)$ a vv hurokélek kétszeres számával nagyobb, mint $d(\{v\})$, de miután hurokélekre általában nincs szükségünk, nem okoz zavart, hogy nem teszünk különbséget az egyelemű halmaz és annak egyetlen eleme között. A G gráf **k-élösszefüggő**, ha minden vágása legalább k élű, más szóval legfeljebb k élének kihagyása után is összefüggő.

A vágás fogalmának általánosításaként a V egy $\mathcal{P}$ partíciójának **határ**án a partíció-részek között vezető (ún. köztes vagy kereszt-) élek halmazát értjük. Ennek $e(\mathcal{P})$ elemszáma $\sum \left[d(Z)/2 : Z \in \mathcal{P}\right]$. A G gráfot **k-partíció összefüggő**nek nevezzük, ha csúcsainak minden t-részes partíciójának határa legalább $k(t-1)$ elemű.

Az $X, Y \subseteq V$ halmazokra $d(X, Y)$ jelöli az $X - Y$ és $Y - X$ halmazok között vezető élek számát. $\Gamma(X) := \{v \in V : v \in V,\ uv \in E$ valamely $u \in X$-re$\}$ jelöli az $X \subseteq V$ szomszédjainak halmazát. Az $X \subseteq V$ halmaz által feszített élek számát $i_G(X)$ jelöli, míg $e_G(X)$ azon élek száma melyeknek legalább egyik végpontja X-ben van. Eszerint $i(X) + e(V - X) = |E|$. Az X ponthalmazt **stabil**nak nevezzük, ha nem feszít élt.

$D = (V, A)$ digráfban egy $X \subseteq V$ részhalmazára a $V - X$-ből X-be belépő élek számát $\varrho(X) = \varrho_D(X) = \varrho_A(X)$ valamelyike jelöli, ez az X halmaz **befoka**, míg a kilépő élekét $\delta(X) = \delta_D(X) = \delta_A(X)$, ami az X **kifoka**. Egy v pont $\varrho(v)$ befoka a v fejű élek száma, így tehát $\varrho(v)$ a vv hurokélek számával nagyobb, mint $\varrho(\{v\})$. Hasonlóképp, a v csúcs $\delta(v)$ **kifoka** a v tövű élek száma. Egy $x : A \to \mathbf{R}$ függvényre legyen $\varrho_x(S) := \sum [x(uv) : uv \in A,\ uv \text{ belép } S\text{-be}]$ és legyen $\delta_x(S) := \varrho_x(V - S)$.

$G = (V, E)$ irányított vagy irányítatlan gráfban $\sigma_G(X) = \sigma(X)$ ($\emptyset \subset X \subseteq V$) jelöli az X elhagyásával keletkező gráf (irányítatlan értelemben összefüggő) komponenseinek számát. Nem túl nehéz igazolni, hogy metsző X, Y halmazokra

$$\sigma(X) + \sigma(Y) \leq \sigma(X \cap Y) + \sigma(X \cup Y) + d(X, Y). \tag{6.1}$$

Egy gráfról azt mondjuk, hogy **Euler-gráf** vagy Euler-féle, ha minden pontjának a foka páros. Egy digráfról azt mondjuk, hogy **irányított Euler-gráf** vagy Euler-féle, ha minden pontjának a befoka egyenlő a kifokával. Mind az irányított, mind az irányítatlan esetben az Euler-gráfot néha **ciklus**nak nevezik. Könnyen igazolható, hogy egy G gráf akkor és csak akkor Euler-féle, ha élhalmaza felbontható élidegen körök uniójára, továbbá, hogy G-nek akkor és csak akkor létezik Euler-bejárása, ha összefüggő és Euler-féle. Hasonlóképp, egy D digráf akkor és csak akkor Euler-féle, ha élhalmaza felbontható élidegen irányított körök uniójára, továbbá, hogy D-nek akkor és csak akkor létezik irányított Euler-bejárása, ha erősen összefüggő és Euler-féle. Amennyiben egy digráfban $\emptyset \subset X \subset V$ és X-ből nem lép ki, azaz $\delta(X) = 0$, úgy az X-be belépő élek halmazát **egyirányú** vagy **irányított vágás**nak hívják.

Hipergráfon egy $(V, \mathcal{F})$ párt értünk, ahol V adott alaphalmaz, $\mathcal{F}$ pedig V részhalmazainak egy rendszere, amelyben ugyanaz a részhalmaz több példányban is szerepelhet. Az $\mathcal{F}$ tagjai a hipergráf **hiperélei**.

A V alaphalmaz X, és Y részhalmaza **ko-diszjunkt**, ha $X \cup Y = V$. X és Y **metsző,** ha $X \cap Y \neq \emptyset$. X és Y **átmetsző**, ha az $X - Y$, $Y - X$, $X \cap Y$ halmazok egyike sem üres. X és Y **keresztező,** ha az $X - Y$, $Y - X$, $X \cap Y$, $V - (X \cup Y)$ halmazok egyike sem üres. X és Y **összehasonlítható**, ha $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$. V részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszerét **halmazlánc**nak nevezzük, ha tagjai páronként összehasonlíthatóak. $\mathcal{F}$ **lamináris**, ha bármely két tagja vagy diszjunkt vagy összehasonlítható. $\mathcal{F}$ **keresztezés-mentes** (cross-free), ha nincs két keresztező tagja.

Egy s-et tartalmazó, de t-t nem tartalmazó X halmazt nevezzünk $s\bar{t}$**-halmaz**nak.

Irodalom

[1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications,* Prentice Hall (1993).

[2] J. Bang-Jensen, A. Frank, and B. Jackson, Preserving and increasing local edge-connectivity in mixed graph, *SIAM J. Discrete Math.,* Vol. **8**, No. 2 (May 1995), 155–178.

[3] F. Boesch and R. Tindell, Robbins's theorem for mixed multigraphs, *Am. Math. Monthly,* **87** (1980), 716–719.

[4] Y.-j. Chu and T.h. Liu, On the shortest arborescence of a directed graph, *Scientia Sinica [Peking],* **14** (1965), 1396–1400.

[5] W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, and A. Schrijver, *Combinatorial Optimization,* John Wiley and Sons, Inc. (1998).

[6] W. H. Cunningham and A. Frank, A primal-dual algorithm for submodular flows, *Mathematics of Operations Research,* Vol. **10**, No. 2 (1985), 251–261.

[7] R. P. Dilworth, A decomposition theorem for partially ordered sets, *Annals of Mathematics* (2), **51** (1950), 161–166.

[8] R. J. Duffin, The extremal length of a network, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (1962), pp. 200–215.

[9] J. Edmonds, Matroids and the greedy algorithm, *Math. Programming,* **1** (1971), 127–136.

[10] J. Edmonds, Edge-disjoint branchings, in: *Combinatorial Algorithms* (B. Rustin, ed.), Acad. Press, New York (1973), 91–96.

[11] Egerváry J., Matrixok kombinatorius tulajdonságairól, *Matematikai és Fizikai Lapok,* No. **38** (1931), 16–28.

[12] Egerváry J., Kombinatorikus módszer a szállítási probléma megoldására, *A Matematikai Kutató Intézet Közleményei,* **IV./1** (1958), 15–28.

[13] K. P. Eswaran and R. E. Tarjan, Augmentation problems, *SIAM J. Computing,* **5**, No. 4 (1976), 653–665.

[14] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks,* Princeton Univ. Press, Princeton NJ. (1962).

[15] Frank A., *Kombinatorikus algoritmusok, algoritmikus bizonyítások,* Egyetemi doktori értekezés, ELTE TTK, Budapest (1976).

[16] A. Frank, On disjoint trees and arborescences, in: *Algebraic Methods in Graph Theory,* Colloquia Mathematica Soc. J. Bolyai, **25** (1978), 159–169. North-Holland.

[17] A. Frank, On the orientation of graphs, *J. Combinatorial Theory, Ser. B.,* Vol. **28**, No. 3 (1980), 251–261.

[18] A. Frank, On chain and antichain families of a partially ordered set, *J. Combinatorial Theory, Ser. B.,* Vol. **29**, No. 2 (1980), 176–184.

[19] A. Frank, How to make a digraph strongly connected, *Combinatorica,* **1**, No. 2 (1981), 145–153.

[20] A. Frank, Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements, *SIAM J. on Discrete Mathematics*, Vol. **5**, No. 1 (1992 February), pp. 22–53.

[21] A. Frank and T. Jordán, Minimal edge-coverings of pairs of sets, *J. Combinatorial Theory,* Vol. **65**, No. 1 (1995, September), pp. 73–110.

[22] Frank A., A Magyar Módszer és általánosításai, *Szigma,* **XXXIII**, 1–2 (2002), pp. 13–44.

[23] A. Frank, On Kuhn's Hungarian Method – a tribute from Hungary, *Naval Research Logistic,* Vol. **52** (2005), 2–5.

[24] A. Frank and A. Gyárfás, How to orient the edges of a graph, in: *Combinatorics* (Keszthely, 1976), Coll. Math. Soc. J. Bolyai, **18**, 353–364, North-Holland.

[25] A. Frank, On a theorem of Mader, *Discrete Mathematics,* Vol. **101** (1992), 49–57.

[26] D. R. Fulkerson, Packing rooted directed cuts in a weighted directed graph, *Math. Programming,* **6** (1974), 1–13.

[27] T. Gallai, Maximum-Minimum Sätze über Graphen, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungariae,* Vol. **9** (1958), pp. 395–434.

[28] A. V. Goldberg and E. R. Tarjan, A new approach to the maximum-flow problem, *J. Association for Computing Machinery,* **35** (1988), 921–940.

[29] C. Greene, Some partitions associated with a partially ordered set, *J. Combinatorial Theory, Ser. A,* **20** (1976), 60–79.

[30] E. Győri, A minimax theorem on intervals, *J. Combinatorial Theory, Ser. B.,* **37** (1984), 1–9.

[31] S. L. Hakimi, On the degrees of the vertices of a directed graph, *J. Franklin Inst.,* **279(4)** (1965), 290–308.

[32] P. Hall, On representatives of subsets, *J. London Math. Soc.,* Vol. **10** (1935), pp. 26–30.

[33] T. Jordán and Z. Szigeti, Detachment preserving local edge-connectivity of graphs, *SIAM J. Discrete Mathematics,* Vol. 17, No. 1. (2003), pp. 72–87.

[34] Kőnig D., Graphok és matrixok, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **38** (1931), 116–119.

[35] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms,* Springer (2000).

[36] H. W. Kuhn, The Hungarian Method for the assignment problem, *Naval Research Logistic Quarterly,* **2** (1955), pp. 83–97.

[37] H. G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies III. The condition for the core structure, *Bull. Math. Biophys.,* **15** (1953), 143–148.

[38] E. L. Lawler, *Kombinatorikus Optimalizálás: hálózatok és matroidok,* Műszaki Kiadó, 1982. (*Combinatorial Optimization: Networks and Matroids,* Holt, Rinehart, and Winston, 1976).

[39] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises,* North-Holland 1979. Magyarul: Lovász L., *Kombinatorikai problémák és feladatok,* Typotex Kiadó, Budapest, 1999.

[40] L. Lovász, On two minimax theorems in graph theory, *J. Combinatorial Theory (B).,* **21** (1976), 96–103.

[41] Lovász, L., Gráfelmélet és diszkrét programozás, *Matematikai Lapok,* **27**, 1–2 (1976–1979), 69–86.

[42] L. Lovász and M. Plummer: *Matching Theory,* North-Holland (1986).

[43] C. L. Lucchesi and D. H. Younger, A minimax relation for directed graphs, *J. London Math. Soc. (2),* **17** (1978), 369–374.

[44] W. Mader, Konstruktion aller n-fach kantenzusammenhängenden Digraphen, *Europ. J. Combinatorics (3)*, (1982), 63–67.

[45] W. Mader, A reduction method for edge-connectivity in graphs, *Ann. Discrete Math.*, **3** (1978), 145–164.

[46] C. St. J. A. Nash-Williams, On orientations, connectivity and odd vertex pairings in finite graphs, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 555–567.

[47] C. St. J. A. Nash-Williams, Decomposition of finite graphs into forests, *J. London Math. Soc.*, **39** (1964), 12.

[48] H. E. Robbins, A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control, *American Math. Monthly,* **46** (1939), 281–283.

[49] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization: Polyhedra and efficiency,* Springer (2003). Vol. 24 of the series Algorithms and Combinatorics.

[50] É. Tardos, A strongly polynomial mincost circulation algorithm, *Combinatorica,* (1985) 247–255.

[51] W. T. Tutte, On the problem of decomposing a graph into n connected factors, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961), 221–230.

[52] K. Vidyasankar, Covering the edge-set of a directed graph with trees, *Discrete Math.*, **24** (1978), 79–85.

[53] T. Watanabe and A. Nakamura, Edge-connectivity augmentation problems, *Computer and System Sciences,* **35**, No. 1 (1987), 96–144.

[54] D. R. Woodall, Minimax theorems in graph theory, in: *Selected Topics in Graph Theory* (eds. L. W. Beineke and R. J. Wilson), Academic Press (1978), pp. 237–269.

András Frank: Connections in Combinatorial Optimization I. Optimization in Graphs

L. Lovász' paper entitled Graph Theory and Discrete Programming (in Hungarian) appeared 30 years ago. Here we summarize recent developments of the area with a special emphase on connectivity problems. The work consists of two parts. The present first one exhibits concrete results concerning paths, trees, cuts, and flows, while the forthcoming second part is going to explore deeper connections by outlining the basic techniques of polyhedral combinatorics and submodular optimization.

Frank András

Operációkutatási Tanszék és
MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Pázmány P. s. 1/c
Budapest H-1117

e-mail: frank@cs.elte.hu.

TÁRSULATI ÉLET – 2006

Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2006. évi érmet **Laczkovich Miklós**nak ítélte oda.

Indoklás: A Mathematical Reviews 117 megjelent cikkéről tud, ezek igen magas színvonalú kutatómunka eredményei. Leghíresebb eredménye Tarski „körnégyszögesítési" problémájának megoldása, melyben egy (1990-ben) már 60 éve megoldatlan probléma meglepő megoldását adja. Megmutatja, hogy azonos területű kör és négyzet véges sok darab és eltolások használatával átdarabolhatók egymásba. E kiemelkedő mértékelméleti eredményen kívül a matematika számos területéhez kapcsolódnak tételei. Ennek illusztrálására – a teljesség igénye nélkül, meglehetősen szubjektíven válogatva – csak néhány cikkét említjük. Kezdetben számos cikket írt valós függvénytani témakörökben: Baire egy függvények tulajdonságai, általánosított deriváltak, tipikus függvények vizsgálata. E témakörben S. Agronskyval, A. M. Brucknerrel és D. Preis-szal közösen írta például a „Convexity Conditions and intersections with smooth functions" című, sokak érdeklődését kiváltó cikkét. Tipikus függvények dinamikájával foglalkozik S. Agronskyval és A. M. Brucknerrel közös „Dynamics of typical continuous functions" című dolgozata. Leíró halmazelmélethez és valós függvénytanhoz kapcsolódik a P. Humkeval közös „The Borel structure of iterates of continuous functions" című munkája. E cikk eredményein kívül is számos érdekes leíró halmazelméleti tételt bizonyított. Sok dolgozata kapcsolódik függvényegyenletekhez és egyenlőtlenségekhez. Egyik jelentős eredménye „On Kemperman's inequality $2f(x)f(x+h)+f(x+2h)$" című cikke. E témakörbe tartozik a de Bruijn által bevezetett „difference property"-hez kapcsolódó több dolgozata. Sok munkájában foglalkozik felbontási és lefedési kérdésekkel. E témakörből illusztrációként a „Tilings of polygons with similar triangles" címmel írt két cikkét idézhetjük. A fentieken kívül halmazelmélethez, logikához, számelmélethez is kapcsolódnak tételei.

Laczkovich Miklós 1998 óta az MTA rendes tagja. Számos bizottság tagjaként és elnökeként szolgálta a magyar tudományos és felsőoktatási közéletet. Vendégprofesszorként, illetve kutatóként több külföldi egyetemen dolgozott. Számtalan konferencia előadása közül az I. Európai Matematikai Kongresszuson tartott meghívott előadást emeljük ki. Iskolateremtő egyéniség. Hosszú éveken keresztül tartotta a nagy létszámú matematika tanárszakos bevezető analízis előadást. Rengeteg szakdolgozat témavezetője volt. Régóta ő az ELTE Matematika Doktori Iskola vezetője.

Jegyzeteket, oktatási segédanyagokat készített. „Conjecture and proof"' című jegyzetét a Mathematical Association of America is kiadta, és világszerte olvassák, használják. T. Sós Verával közös Analízis tankönyve nagy siker a hallgatók és oktatók körében egyaránt. Témavezetése mellett szerezte Vancsó Ödön az egyetemi doktori, Keleti Tamás és Elekes Márton a Ph.D., Buczolich Zoltán pedig a kandidátusi fokozatát. Oktatói és tudományos tevékenységét eddig a Grünwald Géza-emlékdíjjal, az MTA Matematikai díjjal, az ELTE Természettudományi díjjal, Akadémiai díjjal, Ostrowski-díjjal, Széchenyi-díjjal és a Magyar Köztársaság Középkeresztjével ismerték el. Csak az tekinthető meglepőnek, hogy eddig még nem kapta meg a Szele Tibor-emlékdíjat.

Beke Manó-emlékdíj

A 2006. évi Beke Manó-emlékdíj bizottság határozata alapján a következők részesültek a Díjban: **Baloghné Csöndes Enikő, Cz Nagyné Bándi Klára, Hraskó András, Kiss Zoltán, Magyar Vendelné, Pálmai Mária, Sinkáné Papp Mária, Számadóné Békéssy Szilvia.**

Indoklás: *Baloghné Csöndes Enikő* szaktanári tevékenységét 1975-ben kezdte Budapesten a VII. kerületben a Bokányi Dezső Általános Iskolában, mely az ún. „Szentlőrinci-modell" alapján működött. Jelenleg a Baross Gábor Általános Iskola tanáraként tevékenykedik. Pályája kezdetétől olyan munkakörben dolgozott, ahol a hátrányos helyzetű, nehezen kezelhető gyermekek fejlesztésére, felzárkóztatására kiemelt figyelmet kellett fordítania. Áldozatkész munkája az évek során meghozta az eredményét, hiszen tanítványai helytálltak a középfokú tanítási intézményekben, a munkahelyükön. Gyakran családi gondok megoldását is magára vállalta. Kerületi matematikai munkaközösség-vezetőként dolgozott a VII. kerületben 1992 és 1998 között, 1998. szeptember 1-től kerületi matematikai tantárgyi gondozói feladatot lát el, felhasználva nagy tapasztalatait. Szakmai felkészültségével, kreatív ötleteivel, lelkesedésével, precíz munkájával a kerületi pedagógusok példaképe lett. Rendszeresen szervez és tart szaktárgyában előadásokat, továbbképzéseket, bemutató órákat. Versenyt szervez a kerületi tanulóknak. Összeállítja a feladatlapokat, és az értékelésben is aktív részt vállal. Egy-egy évben az általa szervezett versenyeken mintegy 400-450 tanuló vesz részt. Három évvel ezelőtt a kerületben levelező matematika versenyt indított, amelyen 80-90 lelkes diák oldja meg rendszeresen a feladatokat. Folyamatosan képezi magát, rendszeresen vesz részt a matematikatanári vándorgyűléseken, szakmai konferenciákon.

Az odaadással és komoly felkészültséggel végzett szakmai munkája, pedagógiai tevékenysége s a matematika tanításáért vállalt áldozatossága kivívta kollégái és a szakma elismerését, megérdemelten kapja meg tehát a Beke Manó-emlékdíjat.

Cz Nagyné Bándi Klára a Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskolán szerzett matematika-fizika szakos általános iskolai tanári diplomát. Első munkahelye 1991-től a veszprémi Bem József Általános Iskola volt, az iskolában működő matematika tagozatos osztályokban tanított. A tanórákon kívül is sokat foglalkozott mind a tehetséges mind a korrepetálásra szoruló tanulókkal. A Veszprém városi „Bem József Matematikaverseny" szervezője volt kb. egy évtizedig, amely versenyek megmozgatták a város általános iskolásainak zömét, segítettek a matematikaversenyekre való felkészülésben. 2001 nyarán megszervezte az első – azóta hagyománnyá vált – LOGO Alkotótábort. 2002 óta a Kossuth Lajos Általános Iskolában tanít matematika tagozatos osztályokban. A Zrínyi-, a Kalmár-, a Kenguru- és a Gordiusz versenyek szervezője, népszerűsítője, városi lebonyolítója. Tanítványait lelkiismeretesen készíti fel a versenyekre, közülük többen is szép eredményeket értek el a különböző megyei és országos versenyeken. Folyamatosan képezi magát, levelezőn szerzett informatika szakos középiskolai tanári diplomát. Szakmai téren mindig lehet hozzá kérdésekkel, kérésekkel fordulni, mindig szívesen segít kollégáinak, tanítványainak, és más szakembereknek is a városban és a megyében egyaránt. Kezdeményezője és szervezője iskolájában a Matematikai napoknak. Közreműködik más területeken is, például Nyelvész anyanyelvi versenyt szervez. 2005 szeptembere óta a Kossuth Lajos Általános Iskola igazgatója, de új feladatai mellett továbbra is folytatja a szerteágazó pedagógusi tevékenységét. Kiváló szaktanári munkájával, a matematika megszerettetésért folytatott sokoldalú tevékenységével érdemelte ki a Beke Manó-emlékdíjat.

Hraskó András felsőoktatási tanulmányait az ELTE TTK matematikus szakán, s vele párhuzamosan a matematika tanári szakon folytatta. Tanári diplomáját az ELTE-n, a matematikusit (MSc fokozat) pedig az angliai Warwick egyetemen szerezte. 2005-ben matematika PhD fokozatot szerzett. 1992–1998-ig a Lauder Javne Gimnáziumban tanított. Ezen időszak alatt tanítványai között rendszeresen voltak OKTV-s döntős diákok. Az 1998-as tanévtől a budapesti Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium vezető tanára. Több cikke jelent meg a Középiskolai Matematika Lapokban a harmadrendű görbék témakörében. 1999-ben Fazakas Tünde kollégájával és tanítványaikkal elkészítették a Bergengóc példatárat, majd 2001-ben ennek folytatását, a Bergengóc példatár II-t. Tudományos publikációi jelentek meg külföldi szaklapokban a Poncelet-tétel témakörében. 11 éven át tagja volt az Arany Dániel matematika versenybizottságnak. Több mint 10 éven át szervezett és vezetett nyári matematikai tehetséggondozó tábort, Montágh Balázs és Kós Géza matematikusok segítségével. Ezen táborok anyagából szerkesztette és részben írta az új Matematikai mozaik című könyvet. Többször tartott nagy sikerrel előadást, a matematika tanárok, Rátz László-vándorgyűlésén, továbbá Szegeden, a József Attila Tudományegyetemen, az MTA Rényi Alfréd Matematika Kutatóintézetében, a Budapesti Műszaki Egyetemen, illetve a ELTE-n. 2000-ben diákjai segítségével létrehozta a Fazekas Gimnázium Matematika honlapját, mely azóta tartalmas oktatási portállá fejlődött. 2000-ben a Graphisoft Alapítványtól a „Matematika Oktatásért Díjat" kapott, 2004-ben elnyerte a Magyar Tudományos Akadémia „Pedagógus Kutatói Pályadíj"-át. Hraskó András vérbeli pedagógus. Tantárgyánál, amelyet megszállottan szeret és tisztel, csak a tanítványai, emberi értékeinek és tehetségének kibontakoztatását tartja fontosabbnak. Tanítványaival értékeken alapuló, a szaktárgyon messze túlmutató munkakapcsolatot tart fenn, mely mind eredményessége, mind szellemisége miatt példaértékű. Vallja és gyakorolja a „tanítva tanulunk" elvet; büszke arra, hogy sokat tanul tanítványaitól is. Önmagával szembeni igényessége rendkívüli teherbírással párosul. E két tulajdonsága következtében kigondolója, szervezője és megvalósítója szinte minden értékteremtő tevékenységnek. (Az internetes feladatmegoldó szakkörtől a túraszakkörön át az osztályfőnöki munkáig.) Kiemelkedő szakmai munkája és pedagógusi tevékenysége mellett segítőkészsége, másokra figyelő képessége és humora is hozzájárul ahhoz, hogy az iskola diákjai és dolgozói között rendkívüli népszerűségnek, teljes elfogadottságnak örvend. Mindezek alapján méltán nyerte el a Beke Manó-emlékdíjat.

Kiss Zoltán 1955-ben végzett az ELTE TTK matematika–fizika–ábrázoló geometria szakán. A kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium az első és egyetlen munkahelye az 1993-as nyugdíjazásáig. Sokszínű tanáregyéniség, a matematika-, a fizika- és a számítástechnika-oktatás meghatározó személyisége, fejlesztésének fáradhatatlan alakja. Hosszú pályafutása alatti következetes és színvonalas tehetséggondozó munkáját elsősorban tanítványai versenyeredményei igazolják. Minden tagozatos osztályából kerültek ki OKTV helyezettek, illetve egyéb országos versenyek és a KöMaL díjazottjai. Szervezte a tehetséggondozás iskolai keretét biztosító tagozatos osztályokat: előbb matematika-fizika tagozat, majd matematika, illetve fizika tagozat létesült, végül 1985-től speciális matematika tagozat működik az iskolában. Ez idő alatt a megye matematikaoktatásának központja lett a Táncsics Gimnázium. A tagozatos osztályaiban végzett tanulók nagy többsége sikeresen felvételizett. A fizika-szertár fejlesztésével a tagozatos osztályoknak, fizika mérési gyakorlat végzése is lehetővé vált. Kb. 25 évig volt a matematika-fizika munkaközösség vezetője. Szaktárgyai mellett a nevelőmunkát is fontosnak tekintette, osztályfőnökként 8 osztályból kovácsolt közösséget. Segítette tanítványai érvényesülését; figyelemmel kísérte életútjukat az érettségi után is. 1974–79 között a Tankönyvkiadó megbízásából az új tankönyvsorozat és példatárak (összesen 12 könyv) lektorálását végezte. Részt vett a Surányi János professzor úr által szervezett munkatankönyv kidolgozásában és kipróbálásában, ahol önálló részfeladata a számítógép és a matematikaoktatás kapcsolatának vizsgálata volt. Elindítója volt 1978-ban a megyei matematikai versenyeknek, melyek szervezését és értékelését azóta is ő végzi. 1980-tól regionális (Somogy, Tolna, Baranya) matematikaversenyt szerveznek Pécsett a 11. és 12. évfolyamosoknak. Kezdettől fogva a somogyiak vezetőjeként a csapat összeállítása és felkészítése a feladata. Többnyire sikeresen szerepelnek a diákjai az egyéni és összetett versenyekben is. 1965–85 között a Bolyai János Matematikai Társulat megyei elnöke volt. Kb. 20 évig végezte az OKTV és Arany Dániel-versenyek első fordulós dolgozatai javításának felülbírálását. Munkáját számos kitüntetéssel ismerték el, 1984-ben megkapta az Apáczai Csere János-díjat is. Egész életútja; szerteágazó tevékenysége, szakmai igényessége, lelkiismeretes munkája, eredményei okán köztiszteletben álló személyiség, méltó tehát a Beke Manó-emlékdíj elnyerésére.

Magyar Vendelné (Szőcs Olga) 1979-től Marcaliban a Noszlopy Gáspár Általános és Alapfokú Művészetoktatási Iskola tanítója. Az egész napos rendszerű, iskolaotthonos oktatásban a reál tantárgycsoportot tanítja. 1990-től az alsó tagozatban matematikát tanítók munkaközösség-vezetője. 1998 óta állandó résztvevője a Rátz László-vándorgyűléseknek, az alsó tagozatos szekció munkájában aktívan vett részt, a gyűjtött tapasztalatait megosztotta kollégáival. Kiemelkedő tudású pedagógus. Kimagasló érdeme, hogy már 1991-ben – amikor először lehetett nevezni a Zrínyi Matematika Versenyre – felismerte annak a jelentőségét, hogy a 8–10 éves tehetséges gyermekeket is sikerrel lehet felkészíteni a megyei és az országos versenyekre, ahol a felsősökhöz hasonlóan ők is érhetnek el kimagasló eredményeket. Bebizonyította, hogy már kisgyermekkorban lehetséges és szükséges a tehetségeket felkutatni és gondozni, majd erre a felsőbb évfolyamokban – mint jó alapra – lehet építkezni. Kollégáit is magával ragadta „úttörő munkájával". 8 éve szervezi a Kalmár László Megyei Matematikaversenyt.

Tanulóiba nagy pedagógiai empátiával oltja be a matematika iránti érdeklődést, a tantárgy szeretetét, a kitartó munka megbecsülését. A nívós tanórákon és a tehetséggondozó foglalkozásokon kialakítja bennük a logikus, problémamegoldó gondolkodás képességét, megalapozza a felsőbb évfolyamok eredményes munkáját. Az ő áldozatkész munkájának is köszönhető, hogy iskolája már három alkalommal is elnyerte a Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei fordulójában a „Legeredményesebb általános iskolának járó" vándorserleget. Az évek során sok tanítványa ért el kiváló eredményt, közülük eddig Mánfai Máté jutott a versenyzésben a legmesszebbre, aki 2005-ben a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián, Mexikóban bronzérmes lett. Iskolájában elnyerte a Noszlopy-díjat. Kiemelkedő matematikatanítói, pedagógusi munkájával érdemelte ki a Beke Manó-emlékdíjat.

Pálmai Mária az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán matematika–fizika szakos középiskolai tanárként végzett 1970-ben. Első munkahelye 1973-ig a lébényi Általános Iskola és Gimnázium volt, majd 1973 óta a Pálffy Miklós Kereskedelmi Középiskola (régebbi nevén a Kereskedelmi Szakközépiskola és Szakmunkásképző Intézet) főállású matematika-fizika szakos pedagógusa lett. Szakmai munkáját nagy hozzáértéssel, színvonalasan végzi. Szaktanári tevékenységét a tanulóközpontú nevelő-oktató munka, az oktatás és nevelés komplex folyamatként való kezelése jellemzi. Igazi, sokszínű pedagógus egyéniség. A szűkebb értelemben vett szaktanári tevékenység mellett munkájában mindig kiemelt fontossággal kezeli a nevelési feladatok megoldását. Osztályfőnökként is nagyon sikeresen tevékenykedik. Több mint 15 éve eredményesen irányítja a matematika munkaközösség munkáját. Érdeklődése messze túlmutat a természettudományok körén. Munkája során kiemelt hangsúlyt helyez ismeretei folyamatos bővítésére. Ez egyrészt a folyamatos önképzésben, másrészt a különböző képzési formákon, továbbképzéseken való rendszeres és aktív részvételben is megnyilvánul. Pedagógusi pályája kezdete óta tagja a Bolyai János Matematika Társulatnak, hasznosan tevékenykedik a Győri tagozat munkájában. Minden évben aktívan kiveszi a részét a Megyei Matematikai Verseny előkészítéséből és szervezéséből. Rendszeresen részt vesz a Rátz László-vándorgyűlésen. 1999 óta fő irányítója és aktív szervezője az iskolájában megrendezésre kerülő Gordiusz matematikaversenynek. Eddigi eredményei, szaktanári és pedagógiai munkája, emberi tulajdonságai alapján nyerte el a Beke Manó-emlékdíjat.

Sinkáné Papp Mária a Nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskolán először tanító szakot végzett, majd matematikatanári diplomát szerzett 1985-ben.

A tanítói pályáját Kazincbarcikán kezdte, az ottani Kertvárosi Általános Iskolában. 1982-től a Nyíregyházi Főiskola Eötvös József Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium szakvezető tanítója, 1998 óta vezető pedagógus, 2000-től az alsó tagozatos munkaközösség vezetője. A 3. és a 4. osztályokban tanít matematikát és természetismeretet, szaktárgyai oktatását magas színvonalon végzi. Tanítványai szeretik, a szülők elismerik pedagógiai, módszertani felkészültségét. Tanítványaival a tanórán kívül is rendszeresen foglalkozik, szakkört vezet, különféle tehetséggondozó programokban vesz részt. Jó kapcsolatot tart a főiskola Tanítóképző Intézetével, tanító szakos hallgatók gyakorlati képzését irányítja. Nevét a tanítók országszerte ismerik, hiszen 1996-tól ő az ABACUS matematikai lapok alsós rovatvezetője. Szervezi és vezeti az alsós tanulók pontversenyét, a „Lurkó Logiká"-t. E témából könyvet is állított össze, tanítványai részére is írt kiegészítő példatárat: Fejtörő feladatok címmel. Szakmai közéleti tevékenysége példamutató, rendszeresen tart továbbképző előadásokat tanítók részére, a Rátz László-vándorgyűlésen is tartott már sikeres előadást. Magas szintű pedagógiai és szakmai felkészültségével a tantárgy iránti elhivatottságával személyes érdeme van abban, hogy a gyakorlóiskola a matematika terén kimagasló eredményeket ért el. A nem könnyű tárgyat közvetlen, rokonszenves egyéniségével, a biztos tudáson alapuló következetességével vonzóvá tudja tenni a matematikában kevésbé tehetséges tanulók számára is. Az általa vezetett osztályok nevelésében is kiváló eredményeket ért el. Mindezek alapján méltán kapja meg most a Beke Manó-emlékdíjat.

Számadóné Békéssy Szilvia Szegeden a József Attila Tudományegyetem matematika–földrajz szakán szerzett tanári diplomát. 1986-tól, az iskola alapításától tanít Budapesten, a Veres Péter Gimnáziumban. Alapító tagként sokat dolgozott az iskola hagyományainak megteremtésében, arculatának formálásában. Az iskola nyolcosztályos tantervének kialakításában is aktívan vett részt. Szakmai munkája páratlanul gazdag. A matematika szépségét és szeretetét igyekszik tanítványainak átadni. Széles módszertani eszköztárával kiválóan alkalmazkodik az eltérő képességű és felkészültségű diákokhoz. Munkaközösség-vezetőként kiemelkedő szerepe van a Veres Péter Gimnázium egységes és magas felkészültségű matematikatanári közösségének kialakításában, és így a tanulók országosan ismert és elismert sikereiben. Saját tanítványai hosszú évek óta ott vannak az országos matematikaversenyek élvonalában. Korábban az OKTV-n, a 2005/2006-os tanévben pedig az Arany Dániel-versenyen volt országos első helyezett diákja. Lelkesedése és munkabírása kihat a fiatal, pályakezdő kollegákra is, akiknek szakmai kérdésekben bármikor szívesen a rendelkezésére áll. Kiemelkedő osztályfőnöki munkájának alapja a gyerekek segítése, szeretete. Szakmai munkája mellett a sportban is eredményes: az elmúlt évek országos szenior magasugró versenyein több kiemelkedő eredményt ért el. A Nemzeti Tankönyvkiadónál a Hajnal-féle gimnáziumi matematika tankönyvcsalád átdolgozását végezte férjével, Számadó Lászlóval. Jelenleg egy új, felső tagozatosoknak készülő tankönyvsorozat alkotótársa. Évekig volt az ELTE külső vezető tanára. Munkája elismeréseként 1998-ban „Óbudai Pedagógiai Érdemekért" emlékérmet, 2002-ben „A Matematika Tehetségeinek Gondozásáért" Ericsson díjat; 2004-ben „A Magyar Matematika Oktatásáért" Graphisoft-díjat vehetett át.

Grünwald Géza-emlékérem

A 2006. évi bizottság határozata alapján az Emlékéremben a következők részesülnek: **Balázs Márton, Figula Ágota, Mátrai Tamás, Rakaczki Csaba.**

Indoklás: *Balázs Márton* 1999-től Tóth Bálint doktorandusza volt a BME Matematika Doktori Iskolájában. PhD fokozatát 2003-ban szerezte meg summa cum laude minősítéssel. Ezután elnyert egy nevesített postdoc állást (Van Vleck assistant professorship) a University of Wisconsin (Madison) matematika tanszékén, ami valószínűség-számítás és sztochasztikus folyamatok tekintetében köztudomásúlag a USA-beli matematika tanszékek élmezőnyében van. 2006 szeptemberében tért haza Magyarországra, azóta a BME Matematika Intézet adjunktusa. Nagyon ötletes, eredeti gondolkodású matematikus, jól ötvözi a fizikus alapképzettségéből adódó jelenség-orientáltságot a matematikai igényességgel. Fő kutatási területe a kölcsönható részecskerendszerek fluktuációinak vizsgálata. Ezek a modern valószínűség-számítás elismerten nehéz problémái. Már doktori tanulmányai során is nagyon szép eredményeket ért el, és ezt a sorozatot postdoc évei során is folytatta/folytatja. Eredményeit vezető nemzetközi folyóiratokban publikálja. A legfontosabbak:

(1) Az ú.n. *bricklayers* modellek bevezetése. E modellekben a lökéshullámok és fluktuációk vizsgálata. E modelleket ma már egyértelműen Balázs Márton nevéhez kapcsolják.

(2) Véletlen közegű *random average* folyamat fluktuációinak vizsgálata, nem konvencionális határeloszlás-tételek bizonyítása ebben a kontextusban.

(3) *Bricklayers* és zero range típusú modellekre a nemegyensúlyi dinamika létezésének konstruktív bizonyítása, az ú.n. lineáris rátanövekedési feltétel nélkül. Ez rendkívül fontos eredmény: e dinamikák létezésének kérdése több mint húsz éve, T. M. Liggett úttörő munkái óta, nyitva volt. Korábban csak nagyon erős és nem természetes megszorításokkal léteztek eredmények.

(4) Az ú.n. aszimmetrikus kizárásos modell áramlás-fluktuációinak pontos aszimptotikája, $t^{1/3}$ anomális skálázás mellett. Ugyancsak egy nevezetes, nehéz probléma megoldása. A két idevonatkozó friss cikk közlésre benyújtva rangos folyóiratokhoz, elbírálás alatt.

Ma már nemzetközileg elismert kutató. Eredményeinek és rangos publikációinak köszönhetően 2005-ben egy (standard, hároméves futamidejű) NSF grant-et is elnyert. Az utóbbi években számos konferenciára hívták meghívott előadónak. Szintén imponáló a meghívott szemináriumi és kollokviumi előadásainak listája. Kutatómunkája színvonalának és produktivitásának eredményeként idehaza elnyerte az MTA Bolyai János Kutatói Ösztöndíját (2006–2009). Kutatómunkáját komoly egyetemi oktatómunka mellett végzi. Doktoranduszi évei alatt a BME Matematika Intézetében mérnökhallgatóknak matematikához, illetve matematikus- és fizikushallgatóknak valószínűség-számításhoz tartott gyakorlatokat. Madisonban már önállóan vitt nagy matematika kurzusokat: kalkulus, kombinatorika, differenciálegyenletek és valószínűség-számítás kurzusokat dolgozott ki és tartott. Sikerének egyik kulcsa az is, hogy nyitott elmével tud együttműködni, megosztani saját gondolatait és befogadni másokét.

Figula Ágota matematikusi és matematika–fizika tanár szakos diplomával rendelkezik, a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének tanársegéde. Diplomamunkáját Nagy Péter irányításával írta, PhD fokozatot szerzett az Erlangeni Egyetemen Karl Strambach professzor témavezetésével, majd a Debreceni Egyetemen Nagy Péter témavezetésével. Munkásságát a topologikus és differenciálható loopok elmélete területén fejti ki, melyet csoportelméleti nézőpontból, Lie-csoportok topologikus és differenciálható széléseinek vizsgálatával tárgyal. Fő kutatási aktivitása összefüggő G Lie-csoportok zárt összefüggő H részcsoportjára vonatkozó olyan erősen tranzitív folytonos, illetve differenciálható $\sigma : G/H \to G$ széléseinek osztályozására irányul. A Bol-loopok és a bal A-loopok osztálya mind az algebrai, mind pedig a differenciálgeometriai kutatásoknak a két leggyakrabban vizsgált loop osztálya, hiszen a differenciálható Bol-loopok affin szimmetrikus terekből, míg a differenciálható bal A-loopok reduktív terekből nyerhetők. Figula Ágota osztályozta a 3 dimenziós differenciálható Bol-loopokat és meghatározta az olyan 3 dimenziós differenciálható bal A-loopokat, melyeknek a bal transzlációi által generált csoportja nem feloldható. Elvégezte a legfeljebb 9 dimenziós félig-egyszerű Lie-csoportok Bol-széléseinek, illetve H-invariáns erősen tranzitív széléseinek osztályozását, és leírta ezen loopok kapcsolatát a valós és komplex hiperbolikus és pszeudo-euklideszi geometriákkal. Karl Strambachhal közös dolgozataiban geometriai interpretációval rendelkező nagy looposztályokat határoztak meg. Egy általános geometriai eljárást adtak olyan loopok konstrukciójára, melyeknek a bal transzlációi által generált csoportja egy $N \times S$ szemidirekt szorzat, ahol N egy feloldható normálosztója az n-dimenziós affin A_n terek affinitáscsoportjának, és S egy egyszerű csoport, mely hűen hat N-en. Továbbá olyan looposztályokat konstruáltak, melyek az A_2n tér transzlációi egy csoportjának és $GL(2n, K)$ valamely részcsoportjának szemidirekt szorzatai, ahol K egy kommutatív test, és elemei az A_2n tér n-dimenziós affin transzverzális részterei. Kutatási eredményei igen alapos Lie-elméleti, globális differenciál-geometriai (affin szimmetrikus és reduktív terek) és nem-asszociatív algebrai (Lie-algebra) ismeretekről tanúskodnak. Összegezve megállapítható, hogy Figula Ágota jelentős, nemzetközileg elismert eredményeket ért el a differenciálható loopok Lie-elméletében.

Mátrai Tamás ötödévesen kezdett el kutatni. Az első év termése egy OTDK első díjas dolgozat és egy közel ugyanilyen erős (az OTDK dolgozattól diszjunkt) szakdolgozat valós függvénytani témákból. Ezekre az eredményeire 2002-ben megkapta a Rényi Kató-emlékdíj első fokozatát. Azóta is rendkívül sikeres kutatásokat végez: 15 további cikket írt, melyek jelentős része igen komoly eredményeket tartalmaz. Az elmúlt négy évben fő kutatási területe a leíró halmazelmélet volt, de több eredménye van operátorfélcsoportokról, valós függvénytanból és Banach-terekről is, egy pedig gráfelméletből. Különösen erős az „On the closure of Baire classes under transfinite convergences” című Fund. Math.-ban megjelent cikke, amelyben azt bizonyítja, hogy Baire-α függvények úgynevezett ω_l-limesze is Baire-α. Ezt a téma egyik szakértője (T. Natkaniec) kérdezte, aki már Baire-2 függvényekre sem tudta ezt belátni. 2005 őszén megvédett (95 oldalas és így is nagyon tömör) PhD dolgozata rendkívül komoly munka. Egy új elméletet dolgozott ki, melynek segítségével a leíró halmazelmélet egyik legnehezebb és legalapvetőbb problématípusát lehet sok esetben megoldani: bizonyítani, hogy egy Borel-halmaz nincs benne egy adott Borel-osztályban. A disszertáció eredményeiből négy cikk készült, melyek közül egyet már elfogadtak a Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.-ban.

Rakaczki Csaba 1999-ben szerzett matematikus diplomát a Kossuth Lajos Tudományegyetemen. Első tudományos eredményeit egyetemi hallgató korában érte el és nemzetközi folyóiratban publikálta. A Bolyai Társulat 1999-ben Rényi Kató-emlékdíjban részesítette. A diploma megszerzése után 2002-ig nappali tagozatos PhD képzésben vett részt. Igen színvonalas disszertációval szerzett PhD fokozatot 2005-ben. 2002-től 2004-ig az MTA-DE Számelméleti Kutatócsoportban dolgozott tudományos segédmunkatársként. 2004 óta a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének alkalmazásában áll, jelenleg tanársegéd. Fő kutatási területe a diofantikus számelmélet. Több jelentős eredményt ért el a diofantikus egyenletek elméletében. Legfontosabb eredményei $f(x) = g(y)$ alakú, ún. szeparábilis diofantikus egyenletek megoldásszámára vonatkoznak. Siegel, majd Bilu és Tichy nevezetes tételei kritériumot szolgáltatnak az ilyen típusú egyenletek megoldásszámának a végességére. Ezek a kritériumok azonban olyan komplikáltak, hogy sokszor alkalmatlanok konkrét egyenletek vagy egyenlettípusok vizsgálatára. Rakaczki egy cikksorozatban elintézte a megoldásszám végességének a kérdését $F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n}$ alakú egyenletek esetén, ahol F lineáris vagy prímszámfokú polinom, b pedig rögzített, nullától különböző egész szám. Számos szerző, közöttük Beukers, Brindza, Kiss, Shorey, Stoll, Tichy és Tijdeman ilyen irányú eredményeinek közös általánosítását és messzemenő továbbfejlesztését adva teljesen leírta azokat az eseteket, amikor az említett egyenlet (megfelelő feltételek mellett) végtelen sok megoldással rendelkezik. Továbbá a kivételes esetek mindegyikében példákkal illusztrálta, hogy a megoldásszám tényleg lehet végtelen. Bizonyításaiban a szeparábilis egyenletek klasszikus és modern elméletét alkotó módon ötvözi. Általános eredményei ineffektívek. Bizonyos fontos speciális esetekben a Baker-módszer felhasználásával eredményeinek effektív változatát is kidolgozta, sőt konkrét esetekben az összes megoldást is meghatározta. Egy másik cikksorozatban szintén egy klasszikus és sokat vizsgált problémakörrel, nevezetesen hatványösszegekre vonatkozó diofantikus egyenletekkel foglalkozik. Bilu, Brindza, Kirschenhofer, Pintér és Tichy bizonyos eredményeinek messzemenő kiterjesztését és továbbvitelét adva Rakaczki megmutatta, hogy (bizonyos természetes feltételek mellett) az $S_m(x) = g(y)$ egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. Itt $S_m(x) = 1^m + 2^m + \ldots + x^m$, $g(y)$ pedig egy racionális együtthatós polinom. Bizonyításaiban fontos szerepet játszanak a Bernoulli-polinomok bizonyos aritmetikai tulajdonságai. Újabban, ezen felhasznált tulajdonságok egy részét általánosítja, élesíti és Euler-polinomokra is kiterjeszti. A nyert eredményeknek további diofantikus alkalmazásai lesznek. Eredményeit 6 megjelent és egy közlésre elfogadott dolgozatban publikálta. További 3 dolgozata van közlésre előkészítve. Munkáiban sokak által vizsgált problémákkal foglalkozik. 7 előadást tartott nemzetközi fórumokon. Munkáihoz, vizsgálataihoz több külföldi matematikus csatlakozott.

Farkas Gyula-emlékdíj

A bizottság a beérkezett javaslatok alapján 2006-ban három Farkas Gyula-emlékdíjat adományoz. A díjazottak: **Bozóki Sándor** (MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Laboratórium), **Rácz Balázs** (MTA SZTAKI Informatika Laboratórium) és **Szabó Péter Gábor** (Szegedi Tudományegyetem, Alkalmazott Informatika Tanszék)

Indoklás: *Bozóki Sándor* 1978-ban született. Az ELTE-n 2001-ben alkalmazott matematikus, 2003-ban matematikatanári diplomát szerzett. A Budapesti Corvinus Egyetem Közgazdaságtudományi Doktori Iskolájában 2006-ban védte meg a disszertációját. Az MTA SZTAKI Operációkutatási és Döntési Rendszerek Laboratóriumában 2001 óta végez kutatómunkát. Kutatási és alkalmazott munkássága nem válik el egymástól, központi témaköre a többszempontú döntési feladatok. Fő kutatási területe a szempontok súlyainak, az alternatívák szempontok szerinti értékelésének meghatározására használható páros összehasonlítás mátrixok vizsgálata. Az ezekre megfogalmazott legkisebb négyzetes közelítés nemlineáris, nem konvex optimalizálást jelent, erre javasolt Bozóki Sándor olyan módszereket, amelyekkel – kis mátrixok esetében – meg lehet találni az optimumot. Részt vett olyan alkalmazásokban, ahol valós rendszerekben kellett a szempontsúlyokat meghatároznia. Az oktatásból is kiveszi a részét, a Budapesti Corvinus Egyetemen több szemináriumot is vezet.

Rácz Balázs 1981-ben született. Matematikus diplomát a BME-n szerzett 2004-ben. Azóta ugyanott doktorandusz hallgató. 2003 óta dolgozik az MTA SZTAKI-ban. Kutatási területe az adatbányászat, amiben már eddig 11 tudományos dolgozatot írt, amikre 9 hivatkozást is kapott. A témakör egyik fontos kérdése a weben való személyre szabott keresés, amikor a felhasználó megadhat néhány általa érdekesnek tartott kezdőoldalt és a kereső ezek alapján rangsorolva jeleníti meg a találatokat. Rácz Balázs egyik legfontosabb, Fogaras Dániellel közös eredménye az első olyan algoritmus, amely tetszőleges kezdőoldal esetén is tud rangsorolni. Az adatbányászati eszköztár, aminek a koncepcióját kidolgozta, egy egész csoport munkáját megalapozta. A már elkészült rendszer funkcionalitásában kezdi megközelíteni a nagy szoftvercégek adatbányászati csomagjait. Több országos és nemzetközi informatikai verseny zsűrijének tagja, a Bolyai Önképző Műhely alapítvány kurátora.

Szabó Péter Gábor 1974-ben született. Szegeden a József Attila Tudományegyetemen szerzett matematikus diplomát, és ott is volt doktorandusz, a PhD fokozatot 2006-ban kapta meg. Jelenleg a Szegedi Tudományegyetemen adjunktus. Kutatómunkája egyik iránya a körpakolások vizsgálata. A négyzetben való legsűrűbb körpakolás egy klasszikus feladat. A témához való hozzájárulását mutatja, hogy a Springer kiadónál megjelenő „New Approaches to Circle Packing in a Square – With Programming" köteten ő szerepel első szerzőként (ami nem egyezik meg az abc renddel). Nagy megtiszteltetés, hogy körpakolási eredményei miatt meghívást kapott a Martin Gardner tiszteletére rendezett szűk körű konferenciára. Szabó Péter Gábor az elméleti kutatómunka mellett még jelentős munkát végez a matematikatörténet és informatikatörténet kutatásában, leírásában is. E tárgykörben nagy számú közleménye jelent meg. Kiemelnénk a Kalmárium című könyvet, ami Kalmár László 12 matematikussal való levelezését dolgozza fel.

Rényi Kató-emlékdíj

A Bizottság a 2006. évi Rényi Kató-emlékdíjat **Ambrus Gergely**nek, a Szegedi Tudományegyetem 2006-ban végzett hallgatójának, **Patakfalvi Zsolt**nak, az ELTE 2006-ban végzett hallgatójának és **Pósfai Anná**nak, a Szegedi Tudományegyetem 2006-ban végzett hallgatójának adja.

Indoklás: *Ambrus Gergely* [2] és [3] dolgozatában azt vizsgálja, hogy mikor reprezentálható egy véges gráf síkbeli pontokkal úgy, hogy az élek irányai egy adott irányhalmazból kerülnek ki. [4] egy kompaktsági tételt igazol n-dimenziós egységgömbök azon tulajdonságára, hogy van olyan egyenes, ami mindegyiket metszi. [5] és [6] iteratív eljárással adódó ponthalmazok sűrűségi tulajdonságaival foglalkozik. [7]-ben a szerzők az $\mathbb{R}^3$-beli egységgömbök elhelyezése Voronoj-celláinak felszínére vonatkozó Bezdek-féle sejtéssel kapcsolatban érnek el eredményt. Publikációi:

[1] Ambrus G.: Néhány szó a Pell-féle egyenletekről, *Polygon,* **X** (2000).

[2] G. Ambrus, J. Barát: A contribution to queen graphs: a substitution method, *Disc. Math.,* **306** (2006), 1105–1114.

[3] G. Ambrus, J. Barát, P. Hajnal: The slope parameter of graphs, *Acta Sci. Math.,* megjelenés alatt.

[4] G. Ambrus, A. Bezdek, F. Fodor: A Helly-type transversal theorem for n-dimensional unit balls, *Arch. Math.* (Basel), **86** (2006), 470–480.

[5] G. Ambrus, A. Bezdek: On iteration processes generating dense point sets, *Periodica Math. Hung.,* megjelenés alatt.

[6] G. Ambrus, A. Bezdek: On point sets containing the incenters, kézirat.

[7] G. Ambrus, F. Fodor: New bound on the strong dodecahedral conjecture, megjelenés alatt.

Patakfalvi Zsolt [1] dolgozatában azt a tényt igazolja, hogy minden véges, 3 reguláris gráf élgráfja normális, azaz van egy klikkfedése, és van egy független halmazokkal való fedése, hogy minden klikknek és minden független halmaznak van közös szögpontja. A [2] cikkben a Thom-polinomokkal kapcsolatos Incidencia Problémát megoldja reprezentációk egy széles osztályára. Publikációi:

[1] Patakfalvi Zsolt: 3-reguláris gráfok élgráfjának normalitása, kézirat.

[2] Z. Patakfalvi: The incidence conjecture, kézirat.

Pósfai Anna a kupongyűjtési feladat azon változatával foglalkozik, amikor adott $m \leq n$ értékekre a gyűjtő feladata $n - m$ különböző kupon összegyűjtése. Csörgő Sándor 1993-ban igazolta, hogy rögzített m-re az eloszlás konvergenciája legfeljebb $(\log n)/n$ rendű. Pósfai az [1] dolgozatban finom Fourier-analízisbeli számításokkal megmutatja, hogy ez a valódi nagyságrend. A [2] dolgozatban azt az esetet vizsgálja, amikor n-nel együtt m is végtelenhez tart. Bizonyos esetekben ekkor is sikerült meghatároznia a konvergencia sebességét. Publikációi:

[1] A. Pósfai, S. Csörgő: Asymptotic approximations for coupon collectors, *Studia Sci. Math. Hung.*, megjelenés alatt.

[2] A. Pósfai: Rates of convergence for normal approximation in incomplete coupon collection, *Acta Sci. Math.*, megjelenés alatt.

„Patai László Alapítvány" díja

A 2006. évi díjat **Tengely Szabolcs** kapta.

Indoklás: *Tengely Szabolcs* 1976. január 13-án született. 1999-ben szerzett matematikus diplomát a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen. Első tudományos eredményeit egyetemi hallgató korában érte el és nemzetközi folyóiratban publikálta azokat. 1999-ben a Bolyai Társulat Rényi Kató-emlékdíjban részesítette. A diploma megszerzése után 2001-ig az Egyetem Matematikai és Informatikai Intézetében dolgozott. Ezt követően 2005-ig a Leideni Egyetemen R. Tijdeman professzor doktorandusza volt. Igen színvonalas disszertációval szerzett PhD fokozatot 2005-ben. Azóta ismét a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetében dolgozik tanársegédként. 2005-ben titkára volt a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny versenybizottságának. 2006-ban Magyary Zoltán Posztdoktori Ösztöndíjban részesült.

Fő kutatási területe a diofantikus számelmélet. Több jelentős eredményt ért el a diofantikus egyenletek effektív elméletében. Egy sor korábbi eredményt lényegesen általánosítva és élesítve, meglepően jó felső korlátot adott az $F(x) = G(y)$ alakú egyenletek x, y megoldásaira, amennyiben az F és G polinomok fokszáma nem relatív prím. Egyben hatékony algoritmust szolgáltatott az összes megoldás megkeresésére. Az eljárás hatékonyságát konkrét egyenletek megoldásával illusztrálta. Egy másik irányban számos korábbi eredményt messzemenően általánosítva azt a meglepő eredményt nyerte, hogy az $x^2 + q^{2m} = 2y^p$ egyenletben, ahol minden paraméter ismeretlen, bizonyos természetes kivételektől eltekintve a megoldásszám véges. Továbbá meghatározta az összes olyan megoldást, melyekre $q = 3$ vagy $q^m \leq 501$. Régi, klasszikus problémakör a számtani sorozatokban található teljes hatványok vizsgálata. Euler megmutatta, hogy triviális esetektől eltekintve négy négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot. Tengely Szabolcs bebizonyította, hogy triviális esetektől eltekintve még négyzetszámokból és köbszámokból sem választható ki négytagú számtani sorozat. Általánosabban azt is megmutatta, hogy adott $k \geq 4$ és $l \geq 2$ mellett $\leq l$ kitevőjű, egymáshoz relatív prím teljes hatványokból csak véges sok k-tagú számtani sorozat képezhető. Ezekkel a szép eredményekkel egyben új kutatási irányt nyitott a diofantikus számelméletben. Eredményeit 6 megjelent és 2 közlésre elfogadott dolgozatban publikálta. Egy további dolgozata van közlésre benyújtva és 3 dolgozata van előkészületben. Munkáiban sokak által vizsgált problémákkal foglalkozik. Bizonyításaiban eredményesen kombinálja a szakterület modern, mély módszereit. Eredményeiről 7 előadást tartott nemzetközi fórumokon.

JELENTÉS A 2006. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 2006. október 27. és november 6. között rendezte meg a 2006. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2006-ban fejezték be.

A verseny lebonyolítására a Bolyai János Matematikai Társulat a következő bizottságot kérte fel: *Buczolich Zoltán, Freud Róbert, Fried Ervin, Halász Gábor, Keleti Tamás, Laczkovich Miklós, Lippner Gábor* (titkár), *Makai Endre, Michaletzky György, Pálfy Péter Pál, Pintz János, Ruzsa Imre* (elnök), *Szabó Endre, T. Sós Vera.*

A bizottság 11 feladatot tűzött ki. A beérkezett megoldások értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta:

I. díjban részesül **Varjú Péter.**

A bizottság második díjat nem ad ki.

III. díjban részesülnek **Harangi Viktor** és **Pach Péter Pál.**

1. dicséretben részesül **Rácz Béla.**

2. dicséretben részesülnek **Puskás Anna** és **Strenner Balázs.**

Indoklás:

Varjú Péter a 3. kivételével mindegyik feladatot megoldotta. Kiemeli a bizottság, hogy öt olyan feladat van, amelyet csak ő oldott meg teljesen.

Harangi Viktor megoldotta a 2., 4., 5., 11. feladatot és lényegében megoldotta a 10.-et.

Pach Péter Pál megoldotta a 4., 5. és 11. feladatot, a 2. feladat egyik felét és részeredményt ért el a 8.-ban.

Rácz Béla megoldotta a 2., 5. és 11. feladatot.

Puskás Anna megoldotta a 4. és 5. feladatot, részeredményt ért el a 3.-ban.

Strenner Balázs megoldotta a 2., és lényegében megoldotta a 10. feladatot.

A feladatok és megoldásaik

1. feladat. *Egy X topologikus tér $d(X)$ sűrűsége az a legkisebb számosság, amire van X-nek ilyen számosságú sűrű altere. Bizonyítandó, hogy ha X tetszőleges kompakt T_2 tér, akkor X^3 tartalmaz $d(X)$ számosságú diszkrét alteret.*

Vázlatos megoldás. Ismert (és triviális), hogy X-ben van $d(X)$-es balról szeparált altér. Szintén ismert, hogy $w(X) = \psi(\Delta, X^2)$ (azaz X súlya = az átló pszeudo-karaktere), ha X kompakt T_2. De ha Y normális és F zárt Y-ban, akkor van $\psi(F, Y)$-os jobbról szeparált Y-ban, tehát X^2-ben van $w(X) \geq d(X)$-es jobbról szeparált. Világos azonban, hogy ha B, illetve J ugyanazon λ típusban balról, illetve jobbról szeparált, akkor $B \times J$ tartalmaz λ-s diszkrét alteret, ezért $X \times X^2 = X^3$-ben van $d(X)$-es diszkrét.

2. feladat. *Legyen T véges fagráf, mely nem csak egy csúcsból áll.*

Legyen s a legnagyobb olyan $X \subset T$ részfa csúcsszáma, amire X minden csúcsának van X-en kívüli szomszédja.

Legyen t a legkisebb olyan pozitív egész, amire megadható T-beli csillagok $C_1, \ldots, C_k$ rendszere, hogy T minden élét ezek közül pontosan t tartalmazza, és T minden csúcsát ezek közül maximum $2t-1$ tartalmazza. (Azaz a csillagok multiplicitással szerepelhetnek.)

Bizonyítsuk be, hogy $s = t$.

Vázlatos megoldás. Az egyszerűség kedvéért súlyozott változatot tekintünk, T minden x csúcsának lesz egy pozitív egész $c(x)$ súlya. Ekkor s a maximális csúcsszám helyett maximális összsúly lesz, t definíciójában meg az x csúcs maximum $2t - c(x)$ csillagban szerepelhet.

Magnak nevezzük az s definíciójában szereplő részfákat.

Vegyünk egy tetszőleges M magot, legyen m csúcsa. Legyen E azon élhalmaz, amiben M $m-1$ élen kívül van még minden csúcsából egy kifelé menő él is, összesen tehát $2m-1$ él. Minden csillag legalább annyi csúcsot tartalmaz M-ből, mint ahány élet E-ből. Viszont a t definíciójában szereplő csillagkollekció minden élet t-szer fed, összesen E éleit $(2m-1)t$-szer, és minden x csúcsot legfeljebb $2t - c(x)$-szer, azaz M csúcsait összesen legfeljebb $2mt - c(M)$-szer. Tehát $(2m-1)t \leq 2mt - c(M)$, így az M mag $c(M)$ összsúlya legfeljebb t, azaz $s \leq t$.

A másik irányú egyenlőtlenséghez csillagokat kell találnunk, amik az éleket s-szer fedik, és minden x csúcsot maximum $2s - c(x)$-szer. Az s érték változtatása nélkül növeljük a csúcsok súlyát, amíg lehet, így feltehetjük, hogy minden csúcs szerepel s súlyú magban (például a levelek s súlyúak lesznek).

Meg-s-szerezzük T összes élét, és a kapott T' gráfot megirányítjuk. A T fa xy éléből keletkező s élet az alábbiak szerint irányítjuk. Elvágjuk ezt az élet, így T két komponensre esik szét. Megkeressük az egyik komponens x-et tartalmazó magjait, és annyi élet, amennyi egy ilyen mag maximális összsúlya x-ből y felé irányítunk. Hasonlóan, a másik komponens legnagyobb súlyú y-t tartalmazó magja súlyának megfelelő élet y-ból x felé irányítunk. (Ha valamelyik komponens egyetlen csúcs, aminek nincs magja, akkor onnan egyelőre nem irányítunk a másik felé élet). Ha marad még él közöttük, azokat bármerre irányítjuk.

1. állítás: nem irányítottunk s-nél több élet. Ellenkező esetben a két maximális összsúlyú magot az xy éllel összekötve s-nél nagyobb összsúlyú magját találjuk T-nek.

2. állítás: Tekintsük egy x csúcsba befelé irányított élek számát minden szomszédból külön-külön. Adjuk össze ezeket mind, kivéve a legkisebb számot. Az összeg pont $s - c(x)$.

Ebből a legalább annyi nem kell, de az is könnyen kijön: Legyen d az x foka T-ben, és $y_1, \ldots, y_d$ a szomszédok. Legyen xy_i elvágása után az y_i-t tartalmazó maximális mag súlya c_i, ekkor y_i-ből legalább c_i él megy x-be T'-ben. Legyen c_1 az egyik legkisebb, akkor az $i = 2, \ldots, d$-re véve a maximális magok unióját, plusz x-et, kapjuk a legnagyobb x-et tartalmazó M magot T-ben, ennek súlya $c(x) + c_2 + \ldots + c_d = s$.

A legfeljebb ennyi, az kell: T'-ben x-ből y_i felé legalább $s - c_i$ él megy ha $i > 1$, hiszen M-ből elhagyva az y_i-n túli részt, magot kapunk. A maradék irányban, azaz y_1 felé legalább $s - c_i$ él megy tetszőleges $i > 1$-re, hiszen M-ből bármelyik ágat elhagyva jó magot kapunk az xy_1 él elvágása után. Ha minden más él befelé megy, az is maximum c_i él $i > 1$ esetén y_i felől, és maximum $\min_{i>1} c_i$ az y_1 felől, azaz az összeg maximum $c_2 + \ldots + c_d = s - c(x)$.

3. Akkor most megadjuk a fedést T' éleinek partícionálásával. Mivel T'-t partícionáljuk minden élet s-szer fedünk. Egy x csúcsot pont annyiszor fedünk nem középpontként, amennyi él megy bele T'-ben. Középpontként meg elég annyiszor, amennyi a legnagyobb multiplicitása a belőle kimenő éleknek. Ez összesen pont s plusz a befelé menő élek összszáma a legkisebb multiplicitású irányt kivéve, azaz a 2. állítás szerint pont $2s - c(x)$.

3. feladat. *Jelölje $f(n)$ a legkisebb olyan pozitív egész számot, amelyre igaz a következő állítás. Ha a sík $f(n)$ általános helyzetű pontja által meghatározott zárt szakaszok mindegyikét megszínezzük négy szín valamelyikével, akkor található n páronként diszjunkt azonos színű szakasz. Bizonyítandó, hogy $f(n) = 6n - 4$.*

Megoldás. Ha az első két színt és a megmaradó két színt is azonosítjuk, akkor a szakaszok egy két-színezését kapjuk, melyben elegendő találni $2n - 1$ páronként diszjunkt azonos színű szakaszt. Ezért a felső becsléshez elegendő belátni az alábbi állítást.

Állítás. *Ha a sík $3n - 1$ általános helyzetű pontja által meghatározott zárt szakaszok mindegyikét megszínezzük két szín valamelyikével, akkor található n páronként diszjunkt azonos színű szakasz.*

Ennek az állításnak az indukciós bizonyítása megtalálható az alábbi cikkben:

Gy. Károlyi, J. Pach and G. Tóth, Ramsey-type results for geometric graphs, *Discrete Comput. Geom.*, **18** (1997), 247–255.

Az alsó becslés igazolásához tekintsük a következő konstrukciót. Egy körvonalon vegyük fel sorban az $A_1, \ldots, A_{n-1}$, $B_1, \ldots, B_{2n-1}$, $C_1, \ldots, C_{n-1}$ és a $D_{2n-2}, \ldots, D_1$ pontokat. Színezzünk pirosra minden olyan szakaszt, amely valamely B_i pontból indul, ahol B_i páros, továbbá az összes B_iB_j szakaszt. Színezzünk ezután kékre minden olyan eddig még nem színezett szakaszt, amely valamely D_i pontból indul, ahol D_i páros, továbbá az összes D_iD_j szakaszt. Színezzünk ezután zöldre minden olyan eddig még nem színezett szakaszt, amely valamely A_i pontból indul, majd sárgára minden olyan eddig még nem színezett szakaszt, amely valamely C_i pontból indul. Most már csak a $B_{2i-1}D_{2j-1}$ szakaszokat kell megszínezni, ezt pedig tegyük a következőképpen: legyen a $B_{2i-1}D_{2j-1}$ szakasz színe zöld, ha $i + j \leq n$, egyébként pedig sárga. Nem nehéz megmutatni, hogy a fenti $6n - 5$ pont között futó szakaszok ilyeténképpen történő színezése mellett nem lesz n páronként diszjunkt megegyező színű szakasz.

4. feladat. *Legyen P véges, legalább kételemű, összefüggő részben rendezett halmaz, és $p: P^3 \to P$ egy háromváltozós monoton függvény, melyre a $p(x,x,y) = y$ azonosság teljesül. Mutassuk meg, hogy van olyan nem üres valódi $I \subset P$, hogy tetszőleges $x \in P$, $y \in I$ esetén $p(x,y,y) \in I$.*

[P összefüggő, ha az összehasonlítható elempárokat élnek tekintve összefüggő gráfot kapunk. A p monoton, ha $x_1 \le y_1$, $x_2 \le y_2$, $x_3 \le y_3$ esetén $p(x_1,x_2,x_3) \le p(y_1,y_2,y_3)$.]

Megoldás. Definiáljuk az $x, y \in P$ elemek $d(x,y)$ távolságát mint a legkisebb olyan n számot, amelyre létezik az alábbi típusú „cikk-cakk" P-ben:

$$x = a_0 \ge b_0 \le a_1 \ge b_1 \le a_2 \dots a_{n-1} \ge b_{n-1} \le a_n = y$$

(vagyis x-ből lefelé indulunk, és y-ba fölfelé érkezünk). Mivel P összefüggő, bármely két elemnek van távolsága. Nyilván $d(x,x) = 0$, és két összehasonlítható, de különböző elem távolsága 1. Az is világos, hogy a fenti definícióban szereplő „cikk-cakkok" meghosszabbíthatóak például az utolsó y elem ismételgetésével. Ezért ha x és y távolsága kisebb, mint n, a fenti cikk-cakk akkor is létezik. Mivel p monoton, ez azt jelenti, hogy

$$d(x_1,y_1), d(x_2,y_2), d(x_3,y_3) \le n \quad \Longrightarrow \quad d\big(p(x_1,x_2,x_3), p(y_1,y_2,y_3)\big) \le n.$$

Lemma. *Tetszőleges $x, y, z \in P$ esetén*

$$d\big(p(x,y,y), z\big) \le \max\left(\left[\frac{d(x,y)+1}{2}\right], d(y,z)\right).$$

A lemma bizonyítása. Legyen $d(x,y) = n$, és rögzítsük a fenti cikk-cakkot x és y között. Jelölje m az y és z távolságát, és legyen $k = \big[(n+1)/2\big]$, továbbá $d = \max(k,m)$. Ekkor

$$d(x, a_k) \le k \le d,$$
$$d(y, a_k) \le k \le d,$$
$$d(y, z) \le m \le d,$$

ahonnan a fenti megjegyzés szerint p-t alkalmazva:

$$d\big(p(x,y,y), p(a_k,a_k,z)\big) \le d.$$

De $p(a_k,a_k,z) = z$ a feladat feltétele miatt, és így a lemmát beláttuk.

Legyen N a P elemei közötti legnagyobb előforduló távolság, és $d(a,c) = N$. Jelölje I azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek távolsága c-től legfeljebb $\big[(N+1)/2\big]$. Ekkor tetszőleges $x \in P$ és $y \in I$ esetén a lemma és $d(y,c) \le \big[(N+1)/2\big]$ miatt

$$d\big(p(x,y,y), c\big) \le \max\left(\left[\frac{d(x,y)+1}{2}\right], d(y,c)\right) \le \left[\frac{N+1}{2}\right].$$

Ezért az I részhalmaznak megvan a feladatban kirótt zártsági tulajdonsága. Nyilván $c \in I$, ezért I nem üres. Ha $a \notin I$, akkor I valódi részhalmaz, és készen vagyunk. Ha viszont $a \in I$, akkor $N \le \big[(N+1)/2\big]$, ahonnan $N \le 1$. Ez azt jelenti, hogy P bármely két elemének van közös alsó korlátja.

Legyen m maximális eleme (egy ilyen) P-nek; belátjuk, hogy $I = \{m\}$ jó választás. Valóban, ha $x \in P$, akkor legyen b alsó korlátja x-nek és m-nek. Ekkor

$$p(x,m,m) \ge p(b,b,m) = m.$$

Az m maximalitása miatt tehát $p(x,m,m) = m$.

5. feladat. *Legyen F_q egy nem 2 karakterisztikájú q elemű véges test, és legyen $V = F_q \times F_q$ az F_q feletti 2 dimenziós vektortér. Legyen $L \subset V$ olyan részhalmaz, ami minden irányban tartalmaz egyenest. (L-beli egyenesen olyan egyenest értünk, melynek minden pontja L-ben van.) Egy V-beli pont rendje az a szám, ahány L-beli egyenes illeszkedik a pontra. Bizonyítsuk be, hogy L legalább q olyan egyenest tartalmaz, amelynek van harmadrendű pontja.*

Vázlatos megoldás. Sajnos a kitűzött feladat ebben a formában nem igaz, a feladat szövegének a végéről kimaradt egy szó. Helyesen így lett volna a feladat vége: „... amelynek van legalább harmadrendű pontja."

Most ennek a módosított változatnak a megoldását vázoljuk.

Mivel $q+1$ irány van, ha L tartalmaz egyenest minden irányban, akkor tartalmaz $q+1$ általános helyzetű egyenest (különbözőek, bármely kettő metszi egymást). Ha ezek közül legfeljebb egy nem tartalmaz legalább harmadrendű pontot (saját magukra nézve), akkor legalább q tartalmaz legalább harmadrendű pontot (a bővebb L-re nézve is). Elég tehát az alábbi lemmát bizonyítani.

Lemma. *Ha adott $q+1$ általános helyzetű egyenes, akkor közülük legfeljebb egy nem tartalmaz legalább harmadrendű pontot (az uniójukra nézve).*

Tegyük fel, hogy van két ilyen egyenes, és jussunk ellentmondásra. Lineáris transzformációval elérhető, hogy a két legalább harmadrendű pontot nem tartalmazó egyenes az x-tengely és az y-tengely, míg a többi egyenes egyenlete $y = a_i x + b_i$, $i = 1, \ldots, q-1$. Az egyenesek általános helyzetéből következik, hogy $\{a_i\} = F_q - \{0\}$, továbbá minden egyenes egymástól és 0-tól különböző pontokban metszi az x és y tengelyeket. Tehát ugyancsak $\{b_i\} = F_q - \{0\}$ és $\{-bi/a_i\} = F_q - \{0\}$. Ez viszont nem lehetséges, mert Wilson tétele miatt $F_q - \{0\}$ elemeinek szorzata -1.

6. feladat. *Legyen $G(x) = \max |A|$, ahol A végigfut az olyan egész számokból álló $A \subset [1, x]$ halmazokon, amelyekben nincs háromtagú mértani sorozat, azaz nincs olyan $x, y, z \in A$, hogy $x < y < z$ és $xz = y^2$. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x\to\infty} G(x)/x$ létezik.*

Megoldás. A következő konvenciót fogjuk használni. Ha valamely betűvel jelöltünk egy halmazt, ugyanaz a betű jelöli a halmaz számolófüggvényét, vagyis pl. $B(x) = \big|B \cap [1, x]\big|$. Fordítva, ha definiáltunk egy függvényt, és az lehet egy halmaz számolófüggvénye, akkor ugyanaz a betű fogja ezt a halmazt jelölni. Továbbá p_i az i-edik prímszám (kezdve $p_1 = 2$-től).

Legyen $G_k(x)$ a fenti maximum azzal a megszorítással, hogy a halmazban csak olyan számok szerepelhetnek, amelyben csak az első k prímszám fordulhat elő ≥ 2 kitevővel.

Legyen $H_k(x)$ a fenti maximum azzal a könnyítéssel, hogy az $xz = y^2$ egyenletnek csak olyan megoldásait zárjuk ki, amelyekben minden $p > p_k$ prím azonos kitevővel szerepel az x, y, z számokban.

Nyilván $G_k(x) \leq G(x) \leq H_k(x)$.

Be fogjuk látni, hogy $H_k(x) - G_k(x) < \varepsilon_k x$, ahol $\varepsilon_k \to 0$, és $\lim H_k(x)/x$ minden k-ra létezik. Ezekből a feladat nyilván következik.

Az első állításhoz vegyük észre, hogy ha veszünk egy H_k definíciójában szereplő halmazt, és elhagyjuk belőle azokat a számokat, amelyek oszthatók egy $p > p_k$ prím négyzetével, akkor egy G_k definíciójában szereplő halmazt kapunk. Így

$$H_k(x) - G_k(x) \leq \sum_{p>p_k} [x/p^2] < \varepsilon_k x,$$

ahol

$$\varepsilon_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} 1/p_j^2 \to 0.$$

Legyen $F_k(x) = \max |A|$ az olyan mértani sorozat mentes $A \subset [1, x]$ halmazokra, amelyek csak az első k prímszámot tartalmazzák. Nyilvánvalóan F_k csak egész számoknál változik, legfeljebb 1-et, és csak olyan egész számnál változhat, amely csak az első k prímből áll. Így van olyan F_k halmaz, amelynek ez a számolófüggvénye, és ez a halmaz kizárólag az első k prímszámból álló számokat tartalmaz. (Az F_k halmaz egyébként nem lesz mértani sorozat mentes.) Legyen L_k azon számok halmaza, amelyek csak $p > p_k$ prímekből állnak. Ekkor

$$H_k(x) = \sum_{n \in L_k} F_k(x/m) = \sum_{m \in F_k} L_k(x/m).$$

Elemi szitálással kapjuk, hogy

$$L_k(x) = \alpha_k x + O(1),$$

ahol

$$\alpha_k = \prod_{i=1}^{k} (1 - 1/p_i),$$

és a hibatag értéke legfeljebb 2^k. Ezt az előzőbe helyettesítve

$$H_k(x) = \alpha_k x \sum_{m \in F_k, m \le x} 1/m + O\big(F_k(x)\big).$$

$F_k(x)$ olyan számokat számol, amelyek az első k prímből állnak, bármelyik kitevője legfeljebb $(\log x)/\log 2$, így $F_k(x) = O\big((\log x)^k\big)$. Ebből az is látszik, hogy a $\sum_{m \in F_k} 1/m$ sor konvergens, így tehát

$$H_k(x)/x \to \alpha_k \sum_{m \in F_k} 1/m.$$

7. feladat. *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvény felírható $f = g_1 + \ldots + g_k$ alakban, ahol $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ valós értékű periodikus függvények rendre $a_1, \ldots, a_k$ periódussal. Következik-e ebből, hogy f felírható $f = h_1 + \ldots + h_k$ alakban is, ahol $h_1, \ldots, h_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ egész értékű periodikus függvények, szintén rendre $a_1, \ldots, a_k$ periódussal?*

Megoldás. A feladat kérdésére a válasz igen.

Rögzítsünk $\mathbb{R}$-ben egy Hamel-bázist, és írjuk fel a g_i függvényeket ebben a bázisban. Bármely z egész szám esetén $g_1(z) + \ldots + g_k(z)$ racionális, ezért a Hamel-bázis irracionális elemeihez tartozó komponensek kiesnek az összegből. Jelöljük $q_i(z)$-vel a $g_i(z)$ valós szám racionális komponensét a Hamel-bázisban. Ekkor $q_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ a_i szerint periodikus függvényeket kapunk, melyek összege $q_1 + q_2 + \ldots + q_k = f$. Most már elég belátni a következő állítást.

Lemma. *Legyen az $f = q_1 + \ldots + q_k$, ahol $f, q_1, \ldots, q_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, és q_i periodikus a_i szerint. Ha van olyan d egész szám, ami minden $f(z)$-nek osztója, akkor a q_i függvények is választhatók úgy, hogy a fenti feltételeken kívül $d \mid q_i(z)$ is teljesül bármely i és bármely z esetén.*

Világos, hogy elég a lemmát prím d esetére belátni. k-szerinti indukciót alkalmazunk. $k = 1$ esetén az állítás nyilvánvaló. Legyen tehát $k > 1$ és tegyük fel, hogy $k - 1$-re igaz az állítás. Jelöljük m-mel az a_i számok legkisebb közös többszörösét. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $d \nmid \frac{m}{a_k}$. Vezessük be az $r_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_d$ függvényeket, ahol $r_i(z)$ a $q_i(z)$ d-szerinti maradékosztálya. Legyen

$$s_i(z) = \frac{a_k}{m} \sum_{l=1}^{\frac{m}{a_k}} r_i(l \cdot a_k + z) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_d.$$

(Az osztást el lehet végezni, mert $d \nmid \frac{m}{a_k}$.)

Mivel s_i minden tagja a_i szerint periodikus, ezért maga s_i is ilyen. Továbbá r_i m szerinti periodicitása miatt

$$s_i(z + a_k) = \frac{a_k}{m} \sum_{l=1}^{\frac{m}{a_k}} r_i(l \cdot a_k + z + a_k) = \frac{a_k}{m} \sum_{l=2}^{\frac{m}{a_k}+1} r_i(l \cdot a_k + z) =$$

$$= s_i(z) + \frac{a_k}{m}\big(r_i(m + l + z) - r_i(l + z)\big) = s_i(z),$$

tehát s_i a_k szerint is periodikus.

Most válasszunk olyan $t_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényeket, melyeknek s_i a d szerinti maradékosztályuk, és a_i valamint a_k szerint is periodikusak. Legyen végül $h_k = q_k + t_1 + \ldots + t_{k-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a_k szerint periodikus függvény. Mivel $\mathbb{Z}_d$-ben teljesül, hogy

$$t_1(z) + \ldots + t_{k-1}(z) \equiv s_1(z) + \ldots + s_{k-1}(z) \equiv$$

$$\equiv \frac{a_k}{m} \sum_{l=1}^{\frac{m}{a_k}} \big(r_1(l \cdot a_k + z) + \ldots r_{k-1}(l \cdot a_k + z)\big) \equiv$$

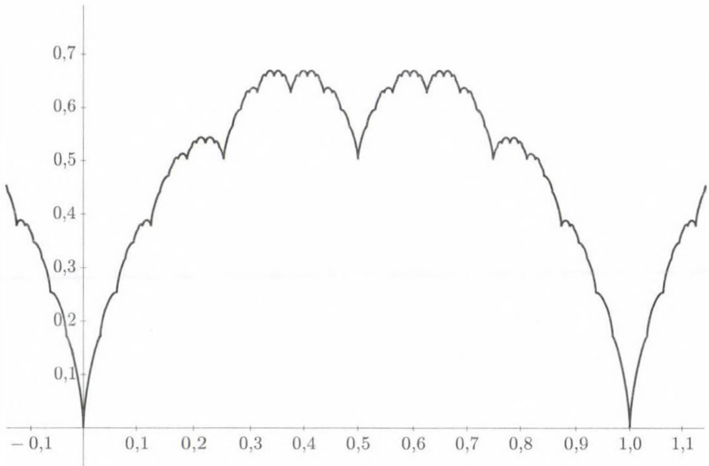
$$\equiv \frac{a_k}{m} \sum_{l=1}^{\frac{m}{a_k}} -r_k(l \cdot a_k + z) \equiv -s_k(z) \equiv -q_k(z),$$

ezért $d \mid h_k$. Továbbá $f - h_k = \sum_{i=1}^{k} q_i - t_i$ előáll mint $k - 1$ megfelelő periodicitású függvény összege. Így $f - h_k$-ra alkalmazható az indukciós feltevés $k - 1$-gyel, és így a lemmát igazoltuk.

Varjú Péter megoldása alapján

8. feladat. *Legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\|2^n x\|$, ahol $\|x\|$ az x-nek a legközelebbi egész számtól vett távolsága. Mit mondhatunk (Lebesgue) majdnem minden $y \in f(\mathbb{R})$-re az $L_y = \{x \in [0,1] : f(x) = y\}$ szinthalmaz számosságáról?*

Megoldás. Az L_y halmaz majdnem minden y-ra véges. A feladatban szereplő f függvényt Takagi-függvénynek is nevezik.



A Takagi-függvény

Legyen $I_0(x) = [0,1]$ és $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} 2^{-n}\|2^n x\|$. Majdnem minden x-re létezik $N_1(x) < N_2(x) < \ldots < N_k(x) < \ldots$. végtelen sorozat, hogy minden k-ra létezik és nullával egyenlő $f'_{N_k}(x)$, de ha $N \neq N_k(x)$, (minden $k \in \mathbb{N}$-re), akkor $f'_N(x) \neq 0$. Jelölje X_∞ a fenti x-ek halmazát.

Vegyük észre, hogy ha x az $f_N(x)$ egy töréspontja, akkor $f_N(x) = f(x)$.

Legyen $g_k(x) = f_{N_k}(x)$, ha $x \in X_\infty$. Ha $x \notin X_\infty$, akkor tetszőleges $x_n \in X_\infty$, $x_n \to x$ választás esetén belátható, hogy $g_k(x_n)$ konvergál egy $g_k(x)$ számhoz, és g_k folytonos.

Legyen $G_0 \overset{\text{def}}{=} (0,1)$. Jelölje G_k azon x-ek halmazát $[0,1]$-ben, melyekre

$$g_k(x) \neq g_{k+1}(x).$$

Könnyen látható, hogy ezen pontok egy környezetében g_k konstans, G_k nyílt halmaz és $G_k \subset G_{k-1}$.

(*i*) Ekkor belátható, hogy $\lambda(G_k) = 1$, és ha $x \notin G_k$, akkor $g_k(x) = f(x) = g_{k'}(x)$ minden $k' \geq k$-ra (ez a G_k-hoz tartozó komponensintervallumok végpontjaira teljesül, és ezek a pontok sűrűn vannak $[0,1] \setminus G_k$-ban).

(*ii*) Jelölje $\mathcal{I}_k$ a G_k komponens intervallumainak halmazát. Ha $I \in \mathcal{I}_{k-1}$, akkor belátható, hogy $g_k|_I$ két monoton darabból áll, amik szimmetrikusak I felezőmerőlegesére. Így ha $I' \in \mathcal{I}_k$, $I' \subset I$, akkor létezik $I'' \neq I'$ (az I'-nek az I felezőmerőlegesére szimmetrikus képe), hogy $I'' \in \mathcal{I}_k$, $g_k(I') = g_k(I'')$ és minden $k' > k$-ra $g_{k'}|_{I'}$ a $g_{k'}|_{I''}$ vízszintes eltoltja, valamint $f|_{I'}$ is az $f|_{I''}$ vízszintes eltoltja.

(*iii*) A (*ii*) tulajdonságot kihasználva indukcióval belátható, hogy minden $I^1 \in \mathcal{I}_k$-hoz található $I^2, \ldots, I^{2^k} \in \mathcal{I}_k$, melyek az $\mathcal{I}_k$ különböző elemei és $g_k(I^j) = g_k(I^{j'})$, és minden $k' > k$-ra $g_{k'}|_{I^j}$ a $g_{k'}|_{I^{j'}}$ vízszintes eltoltja, valamint $f|_{I^j}$ az $f|_{I^{j'}}$ vízszintes eltoltja.

A Takagi-függvény képzési szabálya alapján könnyen látható, hogy $I \in \mathcal{I}_{k-1}$ esetén

$$\lambda\big(g_k(I)\big) \leq \lambda(I) \text{ és } \lambda\big(f(I)\big) \leq \lambda(I). \tag{0.1}$$

A (iii) tulajdonság és a (0.1) becslés szerint

$$\lambda\big(g_k(G_{k-1})\big) \le 2^{-k+1} \sum_{I \in \mathcal{I}_{k-1}} \lambda(I) = 2^{-k+1} \tag{0.2}$$

és

$$\lambda\big(f(G_{k-1})\big) \le 2^{-k+1} \sum_{I \in \mathcal{I}_{k-1}} \lambda(I) = 2^{-k+1}. \tag{0.3}$$

Legyen $G_\infty = \cap_{k=1}^{\infty} G_k$. A (0.3) becslés szerint $\lambda\big(f(G_\infty)\big) = 0$, továbbá a Borel–Cantelli-lemma és (0.2) szerint majdnem minden y csak véges sok $g_k(I)$-hez tartozhat hozzá, ahol $k \in \mathbb{N}$ és $I \in \mathcal{I}_{k-1}$. Jelölje Y' ezen $y \in f(\mathbb{R})$-ek halmazát.

Tegyük föl, hogy $y \in Y' \setminus f(G_\infty)$ és $x \in f^{-1}(y) \cap (0,1)$. Ekkor van olyan k, amire $x \in G_{k-1} \setminus G_k$ és $I \in \mathcal{I}_{k-1}$, hogy $x \in I \setminus G_k$, $y = f(x) = g_k(x)$ és $g_k|_{I \setminus G_k}$ két szigorúan monoton darabból áll, azaz pontosan még egy $x' \in I \setminus G_k$, $x' \ne x$-re lesz $y = g_k(x')$, és ekkor $y = f(x) = f(x')$ is teljesül. Mivel $y \in Y'$ ezért véges azon k-k halmaza és rögzített k-ra azon $I \in \mathcal{I}_{k-1}$ intervallumok száma, melyekre $f^{-1}(y) \cap I \ne \emptyset$. Tehát $f^{-1}(y)$ véges.

E feladat kicsit általánosabb megoldását és egyéb kapcsolódó eredményeket tartalmaz a következő cikk:

Z. Buczolich, Irregular 1-sets on the graphs of continuous functions, *Acta Math. Hung.*, közlésre elfogadva.

9. feladat. *Van-e a $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ körvonalnak olyan önmagára való φ homeomorfizmusa, amely szinguláris (azaz majdnem mindenütt 0 a deriváltja), de az $f : T \to T$, $f(x) = \varphi^{-1}\big(2 \cdot \varphi(x)\big)$ leképezés abszolút folytonos?*

Megoldás. Tekintsük a következő $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ függvényt, ami $[0,1] \to [0,1]$ függvényként tekintve szigorúan monoton növő, folytonos és bijektív. Először diadikus racionális pontokban adjuk meg rekurzívan: Legyen $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$ és ha már definiáltuk ψ-t az $\frac{l}{2^k}$ és $\frac{l+1}{2^k}$ pontokban, akkor legyen

$$\psi\left(\frac{2l+1}{2^{k+1}}\right) = \frac{2}{3}\psi\left(\frac{l}{2^k}\right) + \frac{1}{3}\psi\left(\frac{l+1}{2^k}\right).$$

Végül legyen

$$\psi(x) = \sup_{\substack{y<x \\ \text{diad. rac.}}} \psi(y)$$

tetszőleges $x \in [0,1]$-re.

Ez a függvény megegyezik a Szőkefalvi-Nagy, Riesz: Funkcionálanalízis című könyv II. fejezet 24. pontjában konstruált függvénnyel $t = 1/3$ választása mellett. Ott belátják, hogy szigorúan monoton növő, folytonos és szinguláris.

Egyszerűen belátható továbbá, hogy moduló 1

$$\psi(2x) = \begin{cases} 3\psi(x) & (x \le 1/2) \\ \dfrac{3\psi(x) - 1}{2} & (x \ge 1/2). \end{cases}$$

Legyen $\varphi = \psi^{-1}$. Ekkor az előző képletbe $x = \varphi(y)$-t helyettesítve, majd az egészre ψ^{-1}-et alkalmazva kapjuk, hogy

$$2\varphi(y) = \begin{cases} \varphi(3y) & (y \le 1/3) \\ \varphi\left(\dfrac{3y-1}{2}\right) & (y \ge 1/3), \end{cases}$$

tehát

$$f(y) = \varphi^{-1}(2\varphi(y)) = \begin{cases} 3y & (y \le 1/3) \\ \dfrac{3y-1}{2} & (y \ge 1/3), \end{cases}$$

ami nyilvánvalóan abszolút folytonos.

Már csak azt kell belátni, hogy φ szinguláris. Ismeretes, hogy egy szigorúan monoton növő $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ függvény pontosan akkor szinguláris, ha van olyan $E \subset [0,1]$ 1 mértékű halmaz, aminek a képe $\alpha(E)$ null mértékű. De ha α homeomorfizmus, akkor $F = [0,1] \setminus \alpha(E)$ jelöléssel F mértéke 1, és $\alpha^{-1}(F) = [0,1] \setminus E$ ismét nullmértékű, tehát ekkor α^{-1} is szinguláris. Mivel ψ szinguláris volt, ezért $\varphi = \psi^{-1}$ is az, és ezzel készen vagyunk.

Varjú Péter megoldása alapján

10. feladat. *Legyenek $K_1, \ldots, K_d$ nemüres belsejű konvex kompakt halmazok $\mathbb{R}^d$-ben. Tegyük föl, hogy erősen vannak szeparálva, ami annyit jelent, hogy bármely $x_1 \in K_1, \ldots, x_d \in K_d$ választásra az $x_1, \ldots, x_d$ pontok affin burka hipersík $\mathbb{R}^d$-ben. Legyen továbbá $0 < \alpha_i < 1$ minden $i = 1, \ldots, d$-re. Egy H félteret α-vágásnak hívunk, ha* vol$(K_i \cap H) = \alpha_i \cdot \mathrm{vol}(K_i)$ *minden i-re („vol" a d-dimenziós térfogatot jelöli). Hány α-vágás van?*

Megoldás. 1) A határozottság kedvéért legyenek a H félterek mindig nyíltak (ez a feladat állítása szempontjából közömbös).

Az állítást a következő általánosabb formában fogjuk, d-re való indukcióval, bizonyítani. *Legyen megadva mindegyik K_i-re egy-egy $f_i : \mathrm{int}\, K_i \to (0, \infty)$, $\mathrm{int}\, K_i$-n integrálható függvény.* Ekkor, vol(K_i), vol$(K_i \cap H)$ helyett, az

$$F_i(K_i) := \int_{\mathrm{int}\, K_i} f_i(x)\, dx, \quad F_i(K_i \cap H) := \int_{(\mathrm{int}\, K_i) \cap H} f_i(x)\, dx$$

mennyiségekre fogjuk a feladatbeli egyenlőségeknek megfelelő

$$F_i(K_i \cap H) = \alpha_i \cdot F_i(K_i)$$

egyenlőségeket vizsgálni. (int, bd, illetve aff *egy halmaz belsejét, határát, illetve affin burkát jelöli.*) Az állítás erre az általánosabb esetre is az lesz, hogy *pontosan két α-vágás van (azaz minden i-re fennáll $F_i(K_i \cap H) = \alpha_i \cdot F_i(K_i)$).*

Ha minden i-re $f_i \equiv 1$, megkapjuk a feladat állítását.

A feladat bizonyítását több részre bontjuk.

2) Előkészületnek legyen $p \in \mathbb{R}^d$, és $K \subset \mathbb{R}^d$ nemüres belsejű kompakt konvex halmaz, amelyekre $p \notin K$. Ekkor létezik $L \subset \mathbb{R}^d$ affin hipersík, amely szigorú értelemben elválasztja p-t K-tól. Legyen $f : \mathrm{int}\, K \to (0, \infty)$ az $\mathrm{int}\, K$-n integrálható függvény. Legyen H nyílt féltér, amelyre $\mathrm{bd}\, H \ni p$ és $(\mathrm{int}\, K) \cap (\mathrm{bd}\, H) \neq \emptyset$. Képzeljük L-et vízszintesnek, és p-t felette levő pontnak. Legyen $C := K \cap H$, és S a p középpontú, 1 sugarú gömb felülete.

Vizsgáljuk az $\int_{\operatorname{int} C} f(x)\,dx$ integrált; ezt szeretnénk más alakban előállítani, mégpedig egy $(d-1)$-dimenziós halmazon vett integrálként. E célból jelölje π_{KL}, illetve π_{KS} azokat a K halmazon értelmezett függvényeket, amelyek $x \in K$-hoz annak p-ből L-re, illetve S-re történő centrális vetítését rendelik hozzá. Továbbá jelölje π_{SL}, illetve π_{LS} az S alsó nyílt félgömbjének L-re, illetve az L-nek S alsó nyílt félgömbjére, p-ből történő centrális vetítését.

Vezessük be a következő jelöléseket: $K_L := \pi_{KL}K$, $K_S := \pi_{KS}K$, $C_L := \pi_{KL}C$, $C_S := \pi_{KS}C$. Az L, illetve S részhalmazaira azoknak L-re, illetve S-re vonatkozó relatív belsejüket jelölje $\operatorname{relint}_L(\cdot)$, illetve $\operatorname{relint}_S(\cdot)$. Természetesen $K_L \subset L$ *kompakt konvex halmaz, és* $\operatorname{relint}_L K \neq \emptyset$. Minden $y \in \operatorname{relint}_S K_S$-re $\pi_S^{-1}(y)$ nem üres nyílt szakasz, amelynek végpontjai folytonosan függnek y-tól; legyen

$$f_S^K(y) := \int_{\pi_{KS}^{-1}(y)} f(x) \cdot \|x-p\|^d \, dx/d.$$

Ekkor $f_S^K(y)$ a $\operatorname{relint}_L K_S$ halmazon pozitív, integrálható, és

$$\int_{\operatorname{int} C} f(x)\,dx = \int_{\operatorname{relint}_S C_S} f_S^K(y)\,dy,$$

ahol dy az S felületén a Lebesgue-mérték. Ezen legutóbbi integrál átírható

$$\int_{\operatorname{relint}_L C_L} f_L^K(z)\,dz$$

alakba, ahol dz az L-en a $(d-1)$-dimenziós Lebesgue-mérték, és $f_L^K(z) := f_S^K\big(\pi_{LS}(z)\big) \cdot J(z)$. Itt $J(z)$ a Radon–Nikodým-deriváltja az S-en értelmezett dy mértékből π_{SL} által L-re átvitt mértéknek, az L-en értelmezett dz mérték szerint. A $J(z)$ függvény választható pozitív analitikus függvénynek L-en (és annak is választjuk). Az integráljelek mögött álló függvények pozitívak és integrálhatóak. Speciálisan

$$\int_{\operatorname{int} K} f(x)\,dx = \int_{\operatorname{relint}_L K_L} f_L^K(z)\,dz\,.$$

Mindebből a *végkövetkeztetés: az $\mathbb{R}^d$-beli H nyílt féltér az f függvény K-n vett integráljának α-ad részét „vágja le" (a feladat szerinti értelemben) $\Longleftrightarrow$ az L-beli $L \cap H$ nyílt féltér az f_L^K függvény K_L-en vett integráljának α-ad részét vágja le.*

3) **Állítás.** $K_1, \ldots, K_d$ *erősen szeparáltak* $\Longrightarrow$ *létezik L affin hipersík, amely szigorúan elválasztja K_d-t $K_1, \ldots, K_{d-1}$ mindegyikétől.*

Bizonyítás. Tekintsük a nemüres belsejű

$$\operatorname{conv}(K_1 \cup \ldots \cup K_{d-1}) = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{d-1}x_{d-1} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1} \geq 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_{d-1} = 1\}$$

és K_d kompakt konvex halmazokat. Ezek a halmazok diszjunktak. Valóban, különben volna egy $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{d-1}x_{d-1} = x_d$ affin összefüggés, alkalmas $x_1 \in K_1, \ldots, x_{d-1} \in K_{d-1}$ és $x_d \in K_d$ pontok között (λ_i-k mint fenn). Ez pedig ellentmondana az állítás feltételének. Tehát a $\operatorname{conv}(K_1 \cup \ldots \cup K_{d-1})$ és K_d kompakt konvex halmazok egy affin hipersíkkal szigorú értelemben elválaszthatóak, amiből állításunk következik.

4) Legyen L egy affin hipersík, amely szigorúan elválasztja K_d-t $K_1, \ldots, K_{d-1}$ mindegyikétől. Válasszunk egy $p \in \operatorname{int} K_d$ pontot. Képzeljük L-et vízszintesnek, és p-t felette levőnek.

Állítás. *Az $(K_1)_L, \ldots, (K_{d-1})_L$ halmazok erősen szeparáltak a $(d-1)$-dimenziós L affin hipersíkban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy volna $z_1 \in (K_1)_L, \ldots, z_{d-1} \in (K_{d-1})_L$, amelyek L-nek egy $(d-3)$-dimenziós affin alterében volnának. Akkor tetszőleges $x_i \in \pi_{K_i L}^{-1}(z_i)$-re $(1 \le i \le d-1)$ az $x_1 \in K_1, \ldots, x_{d-1} \in K_{d-1}$, továbbá a $p \in K_d$ pontok benne volnának az előző $(d-3)$-dimenziós affin altér és p által kifeszített $\mathbb{R}^d$-beli legfeljebb $(d-2)$-dimenziós affin altérben. Ez ellentmondana a feladat feltételének.

5) Legyen $H \subset \mathbb{R}^d$ nyílt féltér, amelyre $K_i \cap (\operatorname{bd} H) \neq \emptyset$ $(1 \le i \le d)$. Válasszunk $p_1 \in K_1 \cap \operatorname{bd} H, \ldots, p_d \in K_d \cap \operatorname{bd} H$ pontokat, és egy $p_{d+1} \in H$ pontot. Az erős szeparáltság miatt $p_1, \ldots, p_d$ affin függetlenek, és akkor $p_1, \ldots, p_d, p_{d+1}$ is az. Definiáljuk H *irányítását* mint a $p_1, \ldots, p_d, p_{d+1}$ pontsorozat irányítását. Ez a $p_1, \ldots, p_d, p_{d+1}$ pontsorozat affin függetlensége miatt létezik, és nem függ a $p_1, \ldots, p_d, p_{d+1}$ pontok választásától. Ugyanis $[K_1 \cap (\operatorname{bd} H)] \times \ldots \times [K_d \cap (\operatorname{bd} H)] \times H$ összefüggő, és az irányítás folytonosan függ a pontoktól.

6) Végül rátérünk a feladat állítása 1)-ben részletezett általánosításának d szerinti indukcióval történő bizonyítására. Pontosabban még többet bizonyítunk: *mind pozitív, mind negatív irányítású féltérből pontosan egy-egy α-vágás van.*

7) Legyen $d = 1$. Ekkor $K_1 = [a, b]$ alakú $(a < b)$. A pozitív (negatív) irányítású nyílt félterek a (c, ∞) $((-\infty, c))$ alakú halmazok. A pozitív irányítás esetén vizsgálni kell az

$$\int_c^b f_1(x)\, dx = \alpha_1 \cdot \int_a^b f_1(x)\, dx$$

egyenletet. A feltétel miatt az egyenlet bal oldala c-nek szigorúan csökkenő folytonos függvénye, $c = a$-ra $\int_a^b f_1(x)\, dx$-szel, $c = b$-re 0-val egyenlő. Így minden $\alpha_1 \in (0, 1)$ esetén pontosan egy $c \in (a, b)$ teljesíti az egyenletünket (és semmilyen $c \in (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ sem). A negatív irányítás esetén pontosan analóg megfontolás bizonyítja az állításunkat.

8) Tegyük most fel a 6)-ban részletezett állítás igazságát $(d-1)$-re, és belátjuk, hogy d-re is teljesül. 3) értelmében létezik egy L affin hipersík, amely szigorúan elválasztja K_d-t $K_1, \ldots, K_{d-1}$ mindegyikétől. Vegyünk egy $p \in \operatorname{int} K_d$ pontot. Legyen H egy nyílt féltér, amelyre $p \in \operatorname{bd} H$. A 2) végkövetkeztetése szerint:
az $\mathbb{R}^d$-beli H nyílt féltér az f_i függvény K_i-n vett integráljának α_i-ed részét „vágja le" (a feladat szerinti értelemben) $\Longleftrightarrow$ az L-beli $L \cap H$ nyílt féltér az $(f_i)_L^{K_i}$ függvény $(K_i)_L$-en vett integráljának α_i-ed részét vágja le $(1 \le i \le d-1)$.

Mivel $(d-1)$-re feltettük a 6) végén írt állítást, azt alkalmazhatjuk a $(d-1)$-dimenziós L affin altérben fekvő $(K_1)_L, \ldots, (K_{d-1})_L$ kompakt konvex halmazokra – amelyeknek L-re vonatkozó $\operatorname{relint}_L\left((K_i)_L\right)$ relatív belsejeik nem üresek – és a $\operatorname{relint}_L\left((K_i)_L\right)$ halmazokon értelmezett pozitív integrálható $(f_i)_L^{K_i}(z_i)$ függvényekre $(1 \le i \le d-1)$. Eszerint bármelyik irányítású $H \subset \mathbb{R}^d$, az x_d pontot határában tartalmazó nyílt féltérből pontosan egy olyan van, amelynek metszete L-lel a $\operatorname{relint}_L\left((K_1)_L\right), \ldots, \operatorname{relint}_L\left((K_{d-1})_L\right)$ halmazokon értelmezett $(f_1)_L^{K_1}, \ldots, (f_{d-1})_L^{K_{d-1}}$ függvények integrálját a kívánt $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}$ arányban vágja ketté. Más szóval, a fenti ekvivalencia értelmében, a $H \subset \mathbb{R}^d$ nyílt féltér az $\operatorname{int} K_1, \ldots, \operatorname{int} K_{d-1}$ halmazokon értelmezett $f_1, \ldots, f_{d-1}$ függvények integrálját a kívánt $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}$ arányban vágja ketté. (Vegyük észre, hogy a $H \cap L \subset L$ féltérnek a $(K_1)_L, \ldots, (K_{d-1})_L$ halmazok által meghatározott irányítása meghatározza a $H \subset \mathbb{R}^d$ féltér irányítását, és különböző $H \cap L \subset L$ fenti irányításokból különböző $H \subset \mathbb{R}^d$ irányításokat kapunk.)

9) Hátra van még az, hogy bármelyik irányítást rögzítve, az $x_d \in \operatorname{int} K_d$ pont alkalmas választásával elérjük, hogy a H féltér az $\operatorname{int} K_d$-n értelmezett f_d függvény integrálját is a kívánt α_d arányban vágja ketté.

Tekintsünk el egyelőre a K_d-re vonatkozó feltételtől, és csak a $K_1, \ldots, K_{d-1}$-re vonatkozó feltételeket tekintsük. Rögzítsünk egy $x_d \in \operatorname{int} K_d$ pontot, és $H \subset \mathbb{R}^d$-nek egy irányítását. Ekkor pontosan egy, az x_d pontot határában tartalmazó, és az adott irányítású $H \subset \mathbb{R}^d$ nyílt altér van, amely az $\operatorname{int} K_1, \ldots, \operatorname{int} K_{d-1}$ halmazokon értelmezett $f_1, \ldots, f_{d-1}$ függvények integráljait a kívánt $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}$ arányban vágja ketté. Jelölje ezen H-t $H(x_d)$. (Az irányítást fixnek képzeljük, és az nincs feltüntetve a $H(x_d)$ jelölésben.)

Vegyük ezt a $H(x_d)$-t, és akármilyen $x_1 \in K_1 \cap (\operatorname{bd} H_1), \ldots, x_{d-1} \in K_{d-1} \cap (\operatorname{bd} H_{d-1})$ pontokat. Vegyük észre, hogy $H(x_d)$ irányítását ezeknek az $x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d$ pontoknak (és még egy, $H(x_d)$-beli pontnak) a segítségével is definiálhattuk volna. Ezért a $\operatorname{bd} H(x_d) = \operatorname{aff}\{x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d\}$ affin hipersíknak $x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d$-nek megfelelő vagy ellenkező irányítása szerinti egységnormális irányítása (megfelelő, ha $\operatorname{bd} H$ irányítása és az egységnormális együtt $\mathbb{R}^d$ pozitív irányítását adja meg) H belsejébe mutat.

Tehát $\operatorname{int} K_d$ particionálva van $\operatorname{int} K_d$-nek irányított affin hipersíkokkal (a fenti $\operatorname{bd} H(x_d)$-kkel) való metszeteire. (Két ilyen metszet, ha különböző, akkor diszjunkt, hiszen különben egy közös pontjukon két azonos irányítású fenti irányított affin hipersík menne át.) Ezen irányított affinhipersík-metszetek között kell megtalálnunk azt az egyetlent, amelyik az $\operatorname{int} K_d$-n értelmezett f_d függvény integrálját is az arra megkívánt α_d arányban vágja ketté.

10) Vegyük észre, hogy egy adott H_0 féltérre, amelyre minden $1 \leq i \leq d$-re $(\operatorname{int} K_i) \cap H_0 \neq \emptyset$, teljesül a következő. Az elegendően közeli H félterekre $(\operatorname{int} K_i) \cap H \neq \emptyset$, és H irányítása a H_0 irányításából származik, a következő értelemben: A $\operatorname{bd} H_0$ irányítás szerinti egységnormálisa (tehát amelyik $\operatorname{bd} H_0$ irányításával együtt $\mathbb{R}^d$ pozitív irányítását határozza meg) és $\operatorname{bd} H$ irányítás szerinti egységnormálisa egymáshoz igen közeliek. ($H = H(u,t) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, u\rangle < t\}$ nyílt félterekre, ahol $u \in S^{d-1}$ és $t \in \mathbb{R}$, *a topológia,* ami szerint a fenti közelséget vettük, *az* $S^{d-1} \times \mathbb{R}$ *szorzattopológia.* Ezt úgy értjük, hogy a fenti $H(u,t)$ nyílt félteret az (u,t) párral azonosítjuk.)

Vegyünk egy adott $x_d \in \operatorname{int} K_d$ pontot. Ezen átmegy egy irányított affinhipersík-metszete $\operatorname{int} K_d$-nek, mégpedig $(\operatorname{int} K) \cap \big(\operatorname{bd} H(x_d)\big)$. Tekintsük ezt vízszintesnek, és legyen $H(x_d)$ efölött. Állítsunk x_d-ben merőlegest erre az affinhipersík-metszetre. Vegyünk fel ezen a merőlegesen x_d fölött vagy alatt egy x_d-től ε távolságú x'_d pontot $\operatorname{int} K_d$-ben, ahol $\varepsilon > 0$ nagyon kicsi. Ezen az x'_d-n is átmegy egy irányított affinhipersík-metszete $\operatorname{int} K_d$-nek, ami diszjunkt az x_d-n átmenőtől.

Ha x_d-nek r sugarú nyílt környezete benn van $\operatorname{int} K_d$-ben, akkor $\operatorname{int} K_d$-nek az x'_d-n átmenő affinhipersík-metszete majdnem függőleges normálisú. Pontosabban, ennek a normálisnak a függőleges iránnyal bezárt szöge legfeljebb $\arctan(\varepsilon/r)$. Valóban, különben az x'_d-n átmenő irányított affinhipersík-metszet már x_d-nek r sugarú környezetében metszené az x_d-n átmenő azonos módon irányított affinhipersík-metszetet.

Tegyük fel, hogy x_d-nek R sugarú zárt környezete tartalmazza K_d-t. Akkor az x_d-n átmenő irányított affinhipersík-metszet affin burkában az x_d középpontú, R sugarú, $(d-1)$-dimenziós gömb fölött, vagy alatt legfeljebb $\varepsilon(R+r)/r$ magasságban haladhat az x'_d-n átmenő irányított affinhipersík-metszet. Így $\operatorname{int} K_d$-nek a két fenti affinhipersík-metszet között levő része legfeljebb $R^{d-1}\kappa_{d-1}\varepsilon(R+r)/r$ Lebesgue-mértékű (κ_i az i dimenziós egységgömb térfogata).

Tekintsük az $A \subset \operatorname{int} K_d$ Lebesgue-mérhető halmazokon értelmezett $A \mapsto \int_A f_d(x)\,dx$ halmazfüggvényt. Ez a halmazfüggvény nemnegatív véges mérték az $\operatorname{int} K_d$ halmaz Lebesgue mérhető részhalmazain, továbbá abszolút folytonos a Lebesgue-mérték $\operatorname{int} K_d$-re történő megszorítására. Így $A_n \subset \operatorname{int} K_d$ Lebesgue-mérhető, $\lambda_d(A_n) \to 0$ esetén

$$\int_{A_n} f_d(x)\,dx \to 0$$

(λ_d a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}^d$-n).

Ebből következően az f_d függvénynek az $\operatorname{int} K_d$ halmaz fent tekintett, x_d-n és x'_d-n átmenő irányított affinhipersík-metszetei közötti részén vett integrálja $\varepsilon \to 0$ esetén 0-hoz tart.

11) Legyenek most $x_{d,1}, x_{d,2}$ tetszőleges pontjai $\operatorname{int} K_d$-nek, amelyekre $\operatorname{int} K_d$-nek a rajtuk átmenő fenti irányított affinhipersík-metszetei különbözők. Ekkor az $[x_{d,1}, x_{d,2}]$ zárt szakasz minden pontja $\operatorname{int} K_d$-nek különböző fenti affinhipersík-metszeteihez tartozik hozzá. Valóban, tegyük fel, hogy volna két különböző pontja ennek a zárt szakasznak, amelyek $\operatorname{int} K_d$-nek ugyanahhoz az affinhipersík-metszetéhez tartoznak. Ekkor a megfelelő affin hipersík metszené az egymástól különböző $\operatorname{bd} H(x_{d,1})$, $\operatorname{bd} H(x_{d,2})$ affin hipersíkokat (mégpedig $x_{d,1}, x_{d,2}$-ben), ami partíció esetén lehetetlen.

Fusson most végig egy x_d pont az $[x_{d,1}, x_{d,2}]$ zárt szakaszon. Ekkor $\operatorname{int} K_d$-nek az x_d-n átmenő affinhipersík-metszete egy megfelelő irányítású $H(x_d)$ nyílt féltér határán van. A fentiek miatt $\operatorname{int} K_d$ és ezen nyílt féltér metszetén f_d integrálja folytonosan függ x_d-től. Lokálisan ezek a $H(x_d)$ nyílt félterek x_d mozgatásával szigorúan nőnek vagy csökkennek. A $[x_{d,1}, x_{d,2}]$ zárt szakasz kompaktsága miatt a szigorú növekedés vagy csökkenés a $[x_{d,1}, x_{d,2}]$ zárt szakaszon globálisan is fennáll.

Az integrál $x_d \in [x_{d,1}, x_{d,2}]$ szerinti folytonossága miatt ez az integrál felvesz minden közbülső értéket az $x_{d,1}$ és $x_{d,2}$-ben felvett értékei között. Ebből következően *a megvalósítható α_d értékek halmaza konvex.*

12) A fenti gondolatmenetből az is kijön, hogy $\operatorname{int} K_d$-nek két különböző irányított affinhipersík-metszetére nem teljesülhet a következő: Az $\operatorname{int} K_d$-nek a megfelelő irányítású két nyílt féltérrel való metszetein – amely két nyílt féltér határa tartalmazza a két irányított affinhipersík-metszetet – az f_d függvény integrálja megegyezne. Hiszen ez az integrál 11) szerint egy $[x_{d,1}, x_{d,2}]$ zárt szakaszon (ahol $x_{d,1}, x_{d,2}$ úgy vannak választva, hogy a két különböző irányított affinhipersík-metszetben legyenek), globálisan szigorúan növekedik vagy csökken. *Ez mutatja az adott α_d esetén az unicitást.*

13) Ugyancsak a 11)-beli gondolatmenet szerint, *a megvalósítható α_d-k halmaza nyílt $(0,1)$-ben.* Ugyanis, vegyünk egy tetszőleges $x_d \in \operatorname{int} K_d$ pontot. Ezután válasszuk a 10)-beli x'_d pontot az ottani értelemben x_d fölött vagy alatt. Az így kapható két fajta $[x_d, x'_d]$ szakaszra 11) eredményét alkalmazva, éppen a kimondott állítás adódik.

Mivel a megvalósítható α_d-k halmaza 11) szerint konvex is, és nyilvánvalóan nem üres, *ez a halmaz (e,f) alakú, ahol $0 \leq e < f \leq 1$.*

14) Egyedül az maradt hátra, hogy *megmutassuk, hogy $0 = e$, $f = 1$.* Ezt az e esetére fogjuk megtenni, a másik eset analóg.

Tegyük fel tehát, hogy $0 < e$. Legyen $e_n \in (e,f)$, $e_1 > e_2 > \ldots$, és $n \to \infty$ esetén legyen $e_n \to e$. Az unicitás és szigorú monotonitás miatt minden n-re van pontosan egy $\alpha_d = e_n$-et megvalósító vágás, és az azokat megvalósító nyílt félterekre $H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \ldots$.

Ha $\cap_{n=1}^{\infty}\big((\operatorname{int} K_d)\cap H_n\big) = \emptyset$, akkor $n \to \infty$ esetén $\lambda_d\big((\operatorname{int} K_d)\cap H_n\big) \to 0$. Ekkor 10) szerint $n \to \infty$ esetén

$$\int_{(\operatorname{int} K_d)\cap H_n} f_d(x)\, dx \to 0.$$

Ezért $e = 0$, ellentmondás az indirekt feltevéssel.

Ha $\cap_{n=1}^{\infty}\big((\operatorname{int} K_d)\cap H_n\big) \neq \emptyset$, akkor válasszunk belőle egy $x_{d,0}$ pontot. Továbbá legyen $x_{d,1} \in \operatorname{int} K$, amelyen átmenő irányított hipersík az integrálból valami $(e,f) \ni \alpha_d$-nyi részt vág le. Tekintsük az $[x_{d,0}, x_{d,1}]$ zárt szakaszt. Fusson ezen végig egy x_d pont. Ekkor, 11) miatt, $\operatorname{int} K$-nak az x_d ponton átmenő affinhipersík-metszetét határában tartalmazó, megfelelő irányítású féltérre az f_d függvény integrálja szigorú monoton módon csökken. Így az $x_{d,0}$ pontra az integrál vágásának aránya legfeljebb $\inf e_n = e$. Másrészt ez az arány az α_d-k lehetséges értékei halmazában is benn van, tehát (e,f)-ben. Ez ellentmondás.

15) Az előző 14) befejezi 6) állításának bizonyítását, ami befejezi 1) állításának bizonyítását, ami viszont befejezi a feladat állításának bizonyítását.

Harangi Viktor és Strenner Balázs megoldása alapján

11. feladat. *Legyen α irracionális szám, és jelölje*

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \alpha x\}$$

az $y = \alpha x$ egyenes által határolt zárt félsíkot. Legyen $P(\alpha, n) = P(X_1, \ldots, X_n \in F)$, ahol az X_n az origóból induló egyszerű szimmetrikus bolyongás a síkon (azaz: mindig 1/4–1/4 valószínűséggel lépünk egy egységet valamelyik égtáj felé az előző lépésektől függetlenül, és $P(\alpha, n)$ annak a valószínűsége, hogy az első n lépésben végig az F félsíkban vagyunk). Bizonyítsuk be hogy $P(\alpha, n)$ nem függ α-tól.

Megoldás. Jelöljük $\mathcal{A}_n$-nel az origóból n lépéssel elérhető rácspontok halmazát, $\mathcal{B}_n$-nel pedig az origóból induló lehetséges n hosszú bolyongások halmazát. Azt kell belátnunk, hogy $\big|\{x \in \mathcal{B}_n,\ x \subset f\}\big|$ nem függ f-től. Kezdjük el forgatni f határoló egyenesét, és vizsgáljuk, hogyan változik a $\{x \in \mathcal{B}_n, x \subset f\}$ halmaz. Világos, hogy csak akkor történik változás, ha a határoló egyenes éppen átmegy $\mathcal{A}_n$ egy (vagy több) elemén, és ekkor a határoló egyenes meredeksége racionális. Így elég belátnunk a következő állítást:

Legyen f egy zárt félsík, amelynek határoló egyenese $y = \alpha x$ egy *racionális* α számmal, és jelöljük e_1 és e_2-vel az $\{y = \alpha x, x > 0\}$, $\{y = \alpha x, x < 0\}$ félegyeneseket. Akkor

$$\big|\{x \in \mathcal{B}_n,\ x \subset f,\ x \cap e_1 = \emptyset\}\big| = \big|\{x \in \mathcal{B}_n,\ x \subset f,\ x \cap e_2 = \emptyset\}\big|$$

Ennek bizonyítására egy bijekciót adunk meg a két halmaz között. Legyenek $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ egy egyszerű bolyongás *növekményeinek* sorozata (azaz $|a_i| = 1$ és a_i párhuzamos valamelyik tengellyel). Nevezzük a sorozat *fordítottjának* a $(-a_k, -a_{k-1}, \ldots, -a_1)$ sorozatot (ez is lehetséges növekményeknek egy sorozata). Világos, hogy egy 0-ból kiinduló bolyongást meghatároz a növekményeinek sorozata.

Legyen most $x = (x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a bal oldalon levő halmaz egy eleme (azaz olyan n hosszú bolyongás, ami f-ben marad, de nem érinti az e_1 nyílt félegyenest), és jelöljük a növekménysorozatát $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$-nel. Bontsuk fel a bolyongást a $e_2 \cup \{0\}$ zárt félegyenestől vett kirándulásokra: $(x_0, x_1, \ldots, x_{i_1})$, $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_2})$, $\ldots$, $(x_{i_{k-1}}, \ldots, x_{i_k})$, $(x_{i_k}, \ldots, x_n)$. Azaz $(x_0, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = x \cap (e_2 \cup \{0\})$, és az utolsó szakasz lehet üres is (ha $x_n \in e_2 \cup \{0\}$). Tekintsük az első k kirándulást, és vegyük mindegyikben a növekménysorozat fordítottját, továbbá tekintsük az utolsó, $k+1$-dik szakasz növekményeit:

$$(-a_{i_1}, -a_{i_1-1} \ldots, -a_1, -a_{i_2}, -a_{i_2-1}, \ldots, -a_{i_1+1}, \ldots, -a_{i_k}, -a_{i_k-1},$$
$$\ldots, -a_{i_{k-1}+1}, a_{i_k+1}, a_{i_k+2}, \ldots, a_n)$$

Könnyen belátható, hogy az új növekménysorozathoz tartozó origóból induló bolyongás f-ben marad, de nem érinti az e_2 nyílt félegyenest, illetve hogy a kapott megfeleltetés valóban bijekció a két halmaz között.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Modok és Társa Nyomda, Kiskunhalas • www.modokestarsa.hu

Matematikai Lapok

2008/2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 14. évfolyam (2008), 2. szám

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A Matematikai Lapok megjelenését támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

2006. december 8-án elhunyt Surányi János, az Eötvös Loránd Tudományegyetem tanára, a Bolyai János Matematikai Társulat korábbi főtitkára, elnöke, majd tiszteletbeli elnöke. Társulatunk életében hosszú időn keresztül meghatározó szerepe volt, nagyon sokat tett a magyar matematikai élet eredményes működéséért. 1948 óta minden évben részt vett a Kürschák-verseny eredményhirdetésén; a 2006. december 8-in már nem tudott. Megrendülten búcsúzunk tőle.

SURÁNYI JÁNOS EMLÉKÉRE

LOVÁSZ LÁSZLÓ

Eltávozott közülünk valaki, aki a maga csendes módján oly sokunk életéhez oly sokkal járult hozzá. Nemcsak azokra gondolok itt, akiket az egyetemen tanított. Mindenki, aki a Középiskolai Matematikai Lapok feladatain dolgozott, aki matematikaversenyeken vett részt, aki matematika tagozatos osztályba járt, általában akinek életpályájához a magyar tehetséggondozás rendszere hozzájárult, Surányi János kitartó, fáradhatatlan munkájának gyümölcseit élvezte.

Surányi Jánostól, mint a matematika kiemelkedő, nemzetközileg elismert kutatójától búcsúzunk. A matematikai logika ragadta meg először, ebből írta doktori disszertációját, majd fontos könyvben foglalta össze az eldöntésprobléma redukcióelméletét bizonyos értelemben lezáró eredményeit. Később fő érdeklődési területe a számelmélet lett, de igen jelentős dolgozattal járult hozzá pl. a perfekt gráfok elméletének elindításához is.

Matematikai alkotásának igen nagy része azonban versenyfeladatok, Kömal feladatok kidolgozása, minél szebb, minél lényegretörőbb megoldásuk keresése, általában a középiskolai matematikaoktatás és tehetséggondozás elmélete és gyakorlata. Elévülhetetlen érdeme a Középiskolai Matematikai Lapok újraindítása a II. világháború után, melynek aztán 1970-ig főszerkesztője volt. A Kürschák-versenyek bizottságában hosszú évtizedeken keresztül vett részt, tagként, majd elnökként, és nagyon nagy részben az ő munkája nyomán került kiadásra a *Matematikai versenytételek*nek a Kürschák-versenyek feladatait is feldolgozó új kiadása. Ennek a nagy sikerű könyvnek angol fordítása, a *Hungarian Problem Book* nyomán az egész világ megismerte a magyar versenyek színvonalát, szépségét.

A magyar matematikaoktatás nemzetközi kapcsolatait lelkesen ápolta, többek között az International Commission on Mathematical Instruction alelnöke volt.

Talán nem is érezzük, milyen szerencsések voltunk, hogy a magyar matematikatanítást olyan tudós személyiség képviselte a nemzetközi porondon, mint Surányi János.

Hosszasan lehetne sorolni tevékenységeit, pozícióit az egyetemen, ahol az algebra és számelmélet tanszék vezetője volt, és ahonnan minden matematikus kollégája, sok-sok volt tanítványa nevében búcsúzom most; a Bolyai Társulatban, melynek főtitkára, elnöke, majd tiszteletbeli elnöke volt; és oly sok helyen másutt. De ez így a hideg tények, érdemek listája; Surányi János neve a matematika iránt érdeklődő középiskolásoknak sokkal többet mondott, sokkal személyesebben csengett. Milyen sokunk polcán volt ott a *Versenytételek* vagy az „Erdős–Surányi", a *Válogatott fejezetek a számelméletből* ronggyá olvasott példánya! Ennek a könyvnek csodaszépen leírt bizonyításaiból értettem meg igazán, mi is a matematika.

Könyvének elolvasása és megszeretése után nem sokkal személyesen is beajánlottak hozzá, és rendszeresen eljártam a lakására, ahol számelméletre tanított, feladatokat mondott, olvasnivalót adott. Magyarázataiban mindig a lényeg kiemelésére törekedett, egy-egy bizonyítás kapcsán mindig azt is ecsetelte, hogy honnan származik a bizonyítás ötlete, hogyan lehet arra rájönni.

Meghatározó szerepe volt abban, hogy Magyarországon elindultak a matematika tagozatos osztályok, és nagy feladatokat vállalt a tananyaguk kidolgozásában. Mi, az első ilyen osztály tanulói erről persze keveset tudtunk, és természetesnek éreztük, hogy Surányi tanár úrral sokszor találkozunk órákon, szakkörökön, előadásokon. Elég természetes volt az is, hogy ő volt érettségi elnökünk. Nemrég került kezembe az a „Jó Surányi János elnökünk" kezdetű, kissé idétlen versike, melyet az érettségi banketten olvastunk fel. Más talán meg is sértődött volna rajta, de János meleg barátsággal fogadta. Nagy érték számomra, hogy ez a barátság egyetemi éveink alatt, majd később is fennmaradt.

Kedves János, nyugodjál békében! Nekünk nagyon fogsz hiányozni.

EGY SCHUR-FÉLE EGYENLŐTLENSÉGRŐL

CSETE LAJOS

A markotabödögei volt általános iskola volt tanítóinak és tanárainak ajánlom szeretettel és tisztelettel.

1. Rövid tartalom

A következőkben egy Schur-féle egyenlőtlenséggel foglalkozunk.

Felidézzük az eredeti Watson-féle bizonyítást, és kimutatjuk, hogy e bizonyítás téves, majd kijavítjuk.

Ezután az egyenlőtlenség néhány Watson-féle kiterjesztésének Watson általi bizonyításait részletezzük. Majd az egyik Watson-féle kiterjesztésnek új bizonyítását adjuk. Ezután a szakirodalom két idevágó bizonyítását idézzük fel.

Végül új bizonyítását adjuk a Schur-féle egyenlőtlenségnek. Remélem, hogy matematikaversenyzőknek és tanáraiknak hasznos lesz megismerkedni e témával.

2. A Schur-féle egyenlőtlenség felbukkanása

Úgy tűnik, hogy a Schur-féle egyenlőtlenséget először egy híres könyvben publikálták.

Hardy–Littlewood–Pólya: *Inequalities,* 1934 és 1952, 64. oldal, 80. tétel, csak kitűzve, bizonyítás nélkül.

Ha $\mu \geq 0$ és x, y, z pozitív valós számok, akkor

$$x^\mu \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^\mu \cdot (y-z) \cdot (y-x) + z^\mu \cdot (z-x) \cdot (z-y) > 0,$$

ha $x = y = z$ nem teljesül.

A szerzők éppen nem írják, hogy ez a tétel Issai Schur (1875–1941) matematikustól származik, hanem olyasmit írnak a 81. tétel utáni megjegyzésükben, hogy ezt, mármint a 81. tételt I. Schur professzor közölte velük, és azt is, hogy ez nem következik a 45. tételből, viszont következik a 80. tételből, bizonyos helyettesítést végrehajtva.

G. N. Watson (1886–1962) professzor egyik cikkében (Watson, 1953) foglalkozott az egyenlőtlenséggel. Itt a cikkében vizsgált második egyenlőtlenséget nevezi Schur-féle egyenlőtlenségnek.

3. G. N. Watson egy bizonyítása az egyenlőtlenségre

Legyen

$$f(x, y, z; \mu) \equiv x^{\mu} \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^{\mu} \cdot (y-z) \cdot (y-x) + z^{\mu} \cdot (z-x) \cdot (z-y).$$

Tehát azt kell igazolnunk, hogy $f(x, y, z; \mu) > 0$, ha x, y, z olyan pozitív számok, amelyek nem egyenlők, ha pedig egyenlők egymással, akkor $f(x, y, z; \mu) = 0$.

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $x \geq y \geq z$, ezzel nem csorbítjuk az általánosságot.

A professzor azt állítja, hogy

$$(*) \quad f(x, y, z; \mu) \equiv (x^{\mu} - y^{\mu}) \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^{\mu} \cdot (x-y)^2 + z^{\mu} \cdot (x-z) \cdot (x-y).$$

Az összeg első tagjában mindegyik tényező nem negatív, az összeg második tagjában is nem negatív kifejezéseket szorzunk össze és végül a harmadik összeg is nem negatív tényezők szorzata. Így $f(x, y, z; \mu) \geq 0$, és itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x = y = z$.

Ezzel igazoltuk a Schur-féle egyenlőtlenséget.

4. G. N. Watson előző bizonyításának cáfolata

Csak az a baj, hogy ez nem bizonyítás, ugyanis a professzor $(*)$ állítása nem igaz. Az említett cikkben nem is bizonyítja ezt az állítást, hiszen olyan nyilvánvalónak tűnt.

A $(*)$ állítást könnyen megcáfolhatjuk. Például legyen $\mu = 1$, $x = 5$, $y = 4$, $z = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(5, 4, 1; 1) &= 5^1(5-4)(5-1) + 4^1(4-1)(4-5) + 1^1(1-5)(1-4) = \\ &= 20 + (-12) + 12 = 20. \end{aligned}$$

Másrészt a $(*)$ állítás jobb oldalába helyettesítve ezen értékeket, azt kapjuk, hogy:

$$(5^1 - 4^1)(5-4)(5-1) + 4^1(5-4)^2 + 1^1(5-1)(5-4) = 4 + 4 + 4 = 12.$$

Mivel 20 nem egyenlő 12-vel, ezért ellentmondásra jutottunk, vagyis nem igaz a $(*)$ állítás. Ezzel megdőlt az előző „bizonyítás".

5. G. N. Watson bizonyításának kijavítása

Arra gyanakodtam, hogy csak valamilyen sajtóhiba lehet a bizonyításban, ezért részletesen megvizsgáltam a bizonyításban szereplő kifejezéseket. Némely próbálkozások után sikerült észrevenni, hogy ha $(*)$ jobb oldalát kiegészítjük a $z^\mu(y-z)^2$ negyedik taggal és a harmadik tagban kicserélünk egy x-et y-ra, akkor igaz lesz az állítás.

Vagyis fennáll, hogy

$$f(x, y, z; \mu) \equiv (x^\mu - y^\mu) \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^\mu \cdot (x-y)^2 + \\ + z^\mu \cdot (y-z) \cdot (x-y) + z^\mu \cdot (y-z)^2.$$

Ez lesz a $(**)$ állítás. Vagyis azt kell igazolni, hogy

$$x^\mu \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^\mu \cdot (y-z) \cdot (y-x) + z^\mu \cdot (z-x) \cdot (z-y) \equiv \\ \equiv (x^\mu - y^\mu) \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^\mu \cdot (x-y)^2 + \\ + z^\mu \cdot (y-z) \cdot (x-y) + z^\mu \cdot (y-z)^2.$$

Induljunk ki a jobb oldal vizsgálatából:

$$(x^\mu - y^\mu) \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^\mu \cdot (x-y)^2 + \\ + z^\mu \cdot (y-z) \cdot (x-y) + z^\mu \cdot (y-z)^2 = \\ = x^\mu(x-y) \cdot (x-z) - y^\mu \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^\mu \cdot (x-y)^2 + \\ + z^\mu \cdot (y-z) \cdot (x-y) + z^\mu \cdot (y-z)^2 = \\ = x^\mu(x-y) \cdot (x-z) + y^\mu \cdot (x-y) \cdot \big(-(x-z) + (x-y)\big) + \\ + z^\mu \cdot (y-z) \cdot \big((x-y) + (y-z)\big) = \\ = x^\mu(x-y) \cdot (x-z) + y^\mu \cdot (x-y) \cdot (z-y) + z^\mu \cdot (y-z) \cdot (x-z) = \\ = x^\mu \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^\mu \cdot (y-z) \cdot (y-x) + z^\mu \cdot (z-x) \cdot (z-y) \equiv \\ \equiv f(x, y, z; \mu).$$

Ezzel igazoltuk a $(**)$ állítást.

Így már könnyen beláthatjuk, hogy teljesül a Schur-féle egyenlőtlenség. Hiszen az előbb igazoltuk, hogy

$$x^\mu \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^\mu \cdot (y-z) \cdot (y-x) + z^\mu \cdot (z-x) \cdot (z-y) = \\ = (x^\mu - y^\mu) \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^\mu \cdot (x-y)^2 + \\ + z^\mu \cdot (y-z) \cdot (x-y) + z^\mu \cdot (y-z)^2.$$

A jobb oldalon levő négytagú összeg mindegyik tényezője pozitív vagy nem negatív, ha figyelembe vesszük, hogy $x \geq y \geq z$ és x, y, z pozitív valós számok. Azaz a jobb oldal nem negatív, ebből következik, hogy a bal oldal is nem negatív és nullával pontosan akkor egyenlő, ha $x = y = z$.

Ezzel valóban igazoltuk a Schur-féle egyenlőtlenséget.

Azt gondolom, hogy nem egyszerűen a nyomdászok hagyták le a hiányzó negyedik tagot és cseréltek fel egy y-t x-re. Ugyanis a szerző a téves $(*)$ állítása után három tagról ír:

„$f(x,y,z;\mu) \equiv (x^\mu - y^\mu)\cdot(x-y)\cdot(x-z) + y^\mu\cdot(x-y)^2 + z^\mu\cdot(x-z)\cdot(x-y)$;

and, with the assumption just stated, each of three terms on the right is either positive or zero."

Persze lehet, hogy úgy is ki lehet javítani a Watson-féle bizonyítást, hogy három darab tag maradjon. Ennek meggondolását Olvasóinkra bízzuk.

6. A Schur-féle egyenlőtlenség egy kiterjesztése $\mu \leq -1$ esetére

A professzor cikkében folytatta (Watson, 1953) a Schur-féle egyenlőtlenség vizsgálatát.

Azt írja, hogy észrevette, miszerint

$$(***) \qquad f(x,y,z;\mu) \equiv xyz\cdot f(1/x,1/y,1/z;-\mu-1).$$

Ebből pedig következik, hogy a Schur-féle egyenlőtlenség teljesül olyan μ értékekre is, amelyekre $\mu \leq -1$.

Sajnálatos módon a szerző most sem igazolja a kulcsállítását $(***)$, így ezt most meg fogjuk vizsgálni.

$$f(1/x,1/y,1/z;-\mu-1) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\mu-1}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{y}\right)^{-\mu-1}\cdot\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{z}\right)^{-\mu-1}\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\right)=$$

$$= x^{\mu+1}\cdot\frac{y-x}{yx}\cdot\frac{z-x}{xz} + y^{\mu+1}\cdot\frac{z-y}{yz}\cdot\frac{x-y}{yx} + z^{\mu+1}\cdot\frac{x-z}{zx}\cdot\frac{y-z}{zy} =$$

$$= x^\mu\cdot\frac{(y-x)\cdot(z-x)}{xyz} + y^\mu\cdot\frac{(z-y)\cdot(x-y)}{xyz} + z^\mu\cdot\frac{(x-z)\cdot(y-z)}{xyz} =$$

$$= \frac{f(x,y,z;\mu)}{xyz}.$$

Ezzel igazoltuk a Watson $(***)$ állítását.

S mivel az $1/x$, $1/y$, $1/z$ értékek szintén pozitívak, ha x, y, z pozitívak, másrészt ha $-\mu - 1 \geq 0$ (vagyis $\mu \leq -1$), akkor ezen $1/x$, $1/y$, $1/z$ és $-\mu - 1 \geq 0$ számokra teljesülnek a Schur-féle egyenlőtlenség feltételei, vagyis fennáll, hogy $f(1/x, 1/y, 1/z; -\mu - 1) \geq 0$, és itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $1/x = 1/y = 1/z$, vagyis ha $x = y = z$.

De a $(***)$ azonosság miatt:

$$\frac{f(x, y, z; \mu)}{xyz} = f(1/x, 1/y, 1/z; -\mu - 1) \geq 0.$$

S mivel az $xyz > 0$, ezért $f(x, y, z; \mu) \geq 0$ teljesül $\mu \leq -1$ -re is. Tehát az eredeti Schur-féle egyenlőtlenség nemcsak $\mu \geq 0$, hanem $\mu \leq -1$ esetén is teljesül.

Ezzel igazoltuk a Schur-féle egyenlőtlenség egy Watson-féle kiterjesztését.

7. Watson professzor történeti megjegyzéseiről

Watson professzor levelet írt G. H. Hardy (1877–1947) professzornak, amelyben megkérdezte, hogy ő vajon tud-e közölni vele még további dolgokat a tételről. Watson szerint Hardy válaszában elküldött egy bizonyítást a tételre, amely ekvivalens az itt megadott bizonyítással, amelyet Hardy sajnálatos módon aszimmetrikusnak, vagyis nem szimmetrikusnak ír le. Vagyis Watson professzor azt állítja (Watson, 1953, 245. oldal), hogy a Hardy professzortól kapott bizonyítás lényegében megegyezik az ő bizonyításával. Az előbb a 3. pontban ismertettük dr. Watson hamis bizonyítását, amelyet a 4. pontban cáfoltunk meg.

„Having gone so far, I wrote and asked Prof. Hardy whether he could tell me anything more about the theorem; in reply, he sent me a proof equivalent to the proof just given (which he described as regrettably unsymmetrical)."

Hardy professzor ezt a tájékoztatást az egyenlőtlenségről Schur professzortól kapta egy levélben, és még azt, hogy ő úgy tudja, hogy ezt az eredményt ezt megelőzően – mármint (Watson, 1953) előtt –, még nem publikálták: *„with the information that he had received the inequality in a letter from Prof. Schur, and that, so far as he knew, the result had not previously been published"*.

Watson professzor előbb idézett cikkében a továbbiakban azt írja, hogy mégis rábukkant az egyenlőtlenség egy korábbi bizonyítására és az egyenlőtlenség kiterjesztésére $\mu + 1$ negatív értékeire. Mégpedig S. Barnard – J. M. Child, *Higher Algebra,* 1936. évbeli könyvben a 217. oldalon.

Watson professzor most már kissé óvatosabban azt írja, hogy úgy látszik nincs korábbi írás, amely a Schur-féle egyenlőtlenség fennállásával foglalkozna a $-1 < \mu < 0$ esetben, ezért konstruál egy ide is érvényes bizonyítást.

8. A Schur-féle egyenlőtlenség Watson-féle kiterjesztése $-1 < \mu < 0$ esetére

Watson professzor azt írja bizonyítás nélkül, hogy nyilvánvaló a következő azonosság:

$$y^{\mu} \cdot (y-z) \cdot (y-x) + z^{\mu} \cdot (z-x) \cdot (z-y) \equiv$$

$$\equiv (y^{\mu+1} - z^{\mu+1}) \cdot (y-z) + x \cdot (z^{\mu} - y^{\mu}) \cdot (y-z).$$

Ennek a bizonyítását tényleg könnyen elvégezhetjük:

$$y^{\mu} \cdot (y-z) \cdot (y-x) + z^{\mu} \cdot (z-x) \cdot (z-y) =$$

$$= (y^{\mu+1} - y^{\mu} \cdot x) \cdot (y-z) + (z^{\mu+1} - z^{\mu} \cdot x) \cdot (z-y) =$$

$$y^{\mu+1} \cdot (y-z) - y^{\mu} \cdot x \cdot (y-z) + z^{\mu+1} \cdot (z-y) - z^{\mu} \cdot x \cdot (z-y) =$$

$$= (y^{\mu+1} - z^{\mu+1}) \cdot (y-z) - y^{\mu} \cdot x \cdot (y-z) - z^{\mu} \cdot x \cdot (z-y) =$$

$$= (y^{\mu+1} - z^{\mu+1}) \cdot (y-z) - y^{\mu} \cdot x \cdot (y-z) + z^{\mu} \cdot x \cdot (y-z) =$$

$$= (y^{\mu+1} - z^{\mu+1}) \cdot (y-z) + \cdot x \cdot (y-z) \cdot (z^{\mu} - y^{\mu}).$$

Ezzel igazoltuk az előző azonosságot.

Majd úgy folytatja, hogy írjunk fel még két hasonló azonosságot x, y, z ciklikus felcserélésével:

$$z^{\mu} \cdot (z-x) \cdot (z-y) + x^{\mu} \cdot (x-y) \cdot (x-z) \equiv$$

$$\equiv (z^{\mu+1} - x^{\mu+1}) \cdot (z-x) + y \cdot (x^{\mu} - z^{\mu}) \cdot (z-x),$$

$$x^{\mu} \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^{\mu} \cdot (y-z) \cdot (y-x) \equiv$$

$$\equiv (x^{\mu+1} - y^{\mu+1}) \cdot (x-y) + z \cdot (y^{\mu} - x^{\mu}) \cdot (x-y),$$

majd összegezzük ezen azonosságokat:

$$y^{\mu} \cdot (y-z) \cdot (y-x) + z^{\mu} \cdot (z-x) \cdot (z-y) +$$

$$+ z^{\mu} \cdot (z-x) \cdot (z-y) + x^{\mu} \cdot (x-y) \cdot (x-z) +$$

$$+ x^{\mu} \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^{\mu} \cdot (y-z) \cdot (y-x) \equiv$$

$$\equiv \sum (y^{\mu+1} - z^{\mu+1}) \cdot (y-z) + \sum x \cdot (z^{\mu} - y^{\mu}) \cdot (y-z).$$

Itt a $\sum$ jelet ciklikus háromtagú összegként használjuk, például $\sum f(a) = f(a) + f(b) + f(c)$, illetve $\sum f(a,b) = f(a,b) + f(b,c) + f(c,a)$.

A bal oldalon éppen a Schur-féle egyenlőtlenségben szereplő kifejezés kétszerese jelent meg, vagyis

$$2 \cdot f(x, y, z; \mu) \equiv \sum (y^{\mu+1} - z^{\mu+1}) \cdot (y - z) + \sum x \cdot (z^{\mu} - y^{\mu}) \cdot (y - z).$$

Az x, y, z tetszőleges pozitív értékeire az összes $(y^{\mu+1} - z^{\mu+1}) \cdot (y - z)$ kifejezés és az összes $x \cdot (z^{\mu} - y^{\mu}) \cdot (y - z)$ kifejezés értéke nem negatív $-1 \leq \mu \leq 0$ esetén az x, y, z változók ciklikus felcserélésénél.

Hiszen, ha $y \geq z$, akkor $y^{\mu} \leq z^{\mu}$ fennáll $-1 \leq \mu \leq 0$ esetén. Így $(y - z) \geq 0$ és $(z^{\mu} - y^{\mu}) \geq 0$, s így mivel x pozitív, valóban fennáll, hogy az $x \cdot (z^{\mu} - y^{\mu}) \cdot (y - z)$ típusú kifejezések nem negatívak.

Másrészt, ha $y \geq z$ és $-1 \leq \mu \leq 0$, akkor $0 \leq \mu + 1 \leq 1$, és teljesül, hogy $y^{\mu+1} \geq z^{\mu+1}$. Így $(y - z) \geq 0$ és $(y^{\mu+1} - z^{\mu+1}) \geq 0$, ezért valóban teljesül, hogy az $(y^{\mu+1} - z^{\mu+1}) \cdot (y - z)$ típusú kifejezések nem negatívak.

Vagyis azt kaptuk, hogy $2 \cdot f(x, y, z; \mu) \geq 0$, azaz $f(x, y, z; \mu) \geq 0$ teljesül, és egyenlőség pontosan akkor van, ha $x = y = z$. Ezen utolsó egyenlőtlenség fennállása pedig azt jelenti, hogy a Schur-féle egyenlőtlenség $-1 \leq \mu \leq 0$ esetén is fennáll, vagyis fennáll az eddig még nem igazolt $-1 < \mu < 0$ esetben is.

Watson professzor kissé bánkódik cikkében (Watson, 1953, 246.oldal), hogy nem sikerült szimmetrikus bizonyítást találnia a μ pozitív esetére. Igaz, hogy megadott aszimmetrikus bizonyítása téves, mint ahogyan ezt a 4. pontban kimutattuk.

„*It is not within my power to give a symmetrical proof of the inequality for general positive values of* μ *...*"

Ezért elhatározza, hogy legalább szimmetrikus bizonyítást ad $\mu = 1$-re és $\mu = 2$-re. „*... but I give symmetrical proofs for* $\mu = 1$ *and for* $\mu = 2$". Ezen speciális esetekre adott bizonyításait most nem ismertetjük.

9. Watson professzor szimmetrikus bizonyításáról

Watson professzor tovább nyomozott a Schur-féle egyenlőtlenségre adandó szimmetrikus bizonyítás után. Második idevágó cikkében (Watson, 1955) leír egy ilyen bizonyítást. Komplex számokkal való számolásokkal, kissé bonyolult, de szimmetrikus módon levezeti a következő formulát.

(W)
$$2 \cdot \left(\sum x\right) \cdot f(x, y, z; \mu) \equiv$$

$$\equiv \sum (yz^{\mu} + zy^{\mu})(y - z)^2 + \sum (y - z)(y^{\mu} - z^{\mu})(x - y - z)^2 +$$

$$+ \sum x(y - z)(yz^{\mu} - zy^{\mu}).$$

Itt feltesszük, hogy $\mu \geq 0$ fennáll. A jobb oldalt vizsgáljuk. Az első összegben mindhárom tag nyilván nem negatív, mert a tagok tényezői nem negatívak. A második összegben $\mu \geq 0$ esetén mindhárom tag nem negatív, mert ekkor az $(y - z)$

és $(y^\mu - z^\mu)$ típusú tényezők azonos előjelűek vagy nullák, és a harmadik tényező nyilván nem negatív. A harmadik összeg tagjaiban az első tényező mindig pozitív, míg $(y - z)$ és $(yz^\mu - zy^\mu)$ azonos előjelűek lesznek, ha $\mu \le 1$. Hiszen $yz^\mu - zy^\mu = yz \cdot (z^{\mu-1} - y^{\mu-1})$, így $\mu \le 1$ esetén $(z^{\mu-1} - y^{\mu-1})$ azonos előjelű lesz $(y - z)$-vel.

Ezzel igazoltuk, hogy a (W) Watson-féle szimmetrikus azonosság jobb oldala nem negatív $0 \le \mu \le 1$ esetén, és pontosan akkor egyenlő nullával, ha $x = y = z$. Mivel $2 \cdot \left(\sum x\right)$ pozitív, ezért fennáll, hogy $f(x, y, z; \mu) \ge 0$, azaz a Schur-féle egyenlőtlenség $0 \le \mu \le 1$ esetben bizonyítva van, ha elfogadjuk a (W) azonosságot.

A (W) azonosság vizsgálatánál kissé elvesztettem a türelmemet, ezért a Maple V Release 4 Student számítógép-algebrai programmal végeztettem az ellenőrzést. Miután sikerült néhány perc alatt betáplálni a (W) egyenlet két oldalát, a gépezet és a program egy villanás alatt közölte, hogy a két oldal azonos.

Továbbra is kérdés, hogyan lehetne számítógép nélkül és a (Watson, 1955) cikknél egyszerűbben, komplex számok nélkül elővezetni a (W) azonosságot.

E. H. Neville (1889–1961) cikkében (Neville, 1956) levezeti elemi úton a (W) Watson-féle szimmetrikus azonosságot a $\mu = 1$ esetére. Ezt az eredményt megtaláljuk a korábbi (Watson, 1955) cikkben is, de komplex számok segítségével levezetve. Ezen speciális esetből a (Watson, 1955) cikkben elemi úton folytatódik a (W) azonosság levezetése. Tehát ha összekombináljuk e két cikk megfelelő részeit, akkor elemi, de nem túl egyszerű bizonyítását kapjuk a (W) azonosságnak.

Érdeklődő Olvasóinkra bízzuk ezen elemi bizonyítás tanulmányozását, vagy egyéb elemi levezetés megtalálását.

10. J. F. Rigby bizonyítása a Schur-féle egyenlőtlenségre

Legyen $\alpha \ge 0$ valós szám és x, y, z pozitív valós számok. A Rigby 1975-ös cikk 51–52. oldala alapján:

$$x^\alpha \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^\alpha \cdot (y-z) \cdot (y-x) + z^\alpha \cdot (z-x) \cdot (z-y) =$$

$$= x^\alpha (x-y)^2 + (x^\alpha - y^\alpha + z^\alpha)(x-y)(y-z) + z^\alpha (y-z)^2.$$

11. J. J. Lévy bizonyítása a Schur-féle egyenlőtlenségre

E bizonyítást J. J. Lévy közölte 1985-ben egy cikkében, amelyben tetszőleges α valós számra igazolja a Schur-féle egyenlőtlenséget. (Lásd a Lévy-cikket és a Mitrinović–Pečarić–Fink-könyv 407. oldalát.) Legyen α tetszőleges valós szám és x, y, z pozitív valós számok. Ha az x, y és z pozitív valós számok között van két olyan, amelyek egyenlőek, például $y = z$, akkor

$$x^\alpha \cdot (x-y) \cdot (x-z) + y^\alpha \cdot (y-z) \cdot (y-x) + z^\alpha \cdot (z-x) \cdot (z-y) = x^\alpha \cdot (x-y)^2.$$

1. eset: Ha $\alpha \geq 0$, akkor

$$x^\alpha \cdot (x-y)\cdot(x-z) + y^\alpha \cdot (y-z)\cdot(y-x) + z^\alpha\cdot(z-x)\cdot(z-y) =$$

$$= (x-y)\big(x^\alpha(x-z) - y^\alpha(y-z)\big) + z^\alpha(x-z)(y-z) >$$

$$> (x-y)(x^\alpha - y^\alpha)(y-z) + z^\alpha(x-z)(y-z) > 0.$$

2. eset: Ha $\alpha < 0$, akkor

$$x^\alpha \cdot (x-y)\cdot(x-z) + y^\alpha \cdot (y-z)\cdot(y-x) + z^\alpha\cdot(z-x)\cdot(z-y) =$$

$$= x^\alpha(x-y)(x-z) + (y-z)\big(-y^\alpha(x-y) + z^\alpha(x-z)\big) >$$

$$> x^\alpha(x-y)(x-z) + (y-z)(-y^\alpha + z^\alpha)(x-z) > 0.$$

Ezzel minden valós α számra bizonyítva van a Schur-féle egyenlőtlenség.

12. Egy új bizonyítás a Schur-féle egyenlőtlenségre

Legyen $\mu \geq 0$ és x, y, z pozitív valós számok. Azt kell igazolni, hogy

$$f(x,y,z;\mu) \equiv x^\mu\cdot(x-y)\cdot(x-z) + y^\mu\cdot(y-z)\cdot(y-x) + z^\mu\cdot(z-x)\cdot(z-y) > 0,$$

ha az $x=y=z$ nem teljesül. A szimmetria miatt az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x \leq y \leq z$.

Legyen most $t > 0$ valós szám és tekintsük az $f(tx,ty,tz;\mu)$ függvényt!

$$f(tx,ty,tz;\mu) = (tx)^\mu\cdot(tx-ty)\cdot(tx-tz) +$$

$$+ (ty)^\mu\cdot(ty-tz)\cdot(ty-tx) + (tz)^\mu\cdot(tz-tx)\cdot(tz-ty) =$$

$$= t^\mu\cdot t\cdot t\cdot x^\mu\cdot(x-y)\cdot(x-z) + y^\mu\cdot(y-z)\cdot(y-x) + z^\mu\cdot(z-x)\cdot(z-y) =$$

$$= t^{\mu+2}\cdot f(x,y,z;\mu).$$

Azt kaptuk, hogy az f függvény homogén függvény, mégpedig $(\mu+2)$-ed fokú. Ebből következik, hogy az $f(x,y,z;\mu) > 0$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha az $f(tx,ty,tz;\mu) > 0$ egyenlőtlenség teljesül.

Így a következő helyettesítéssel normálhatjuk a függvényt: Legyen t olyan pozitív valós szám, amelyre $tx = 1$, $ty = 1+a$, $tz = 1+b$. Vegyük észre, hogy $x \leq y \leq z$ miatt $tx \leq ty \leq tz$, ebből pedig $1 \leq 1+a \leq 1+b$, tehát $0 \leq a \leq b$. Ekkor

$$f(tx,ty,tz;\mu) = 1^\mu\cdot\big(1-(1+a)\big)\cdot\big(1-(1+b)\big) +$$

$$+ (1+a)^\mu\cdot\big(1+a-(1+b)\big)\cdot(1+a-1) +$$

$$+ (1+b)^\mu \cdot (1+b-1) \cdot \big(1+b-(1+a)\big) =$$

$$= (-a)\cdot(-b) + (1+a)^\mu \cdot (a-b)\cdot a + (1+b)^\mu \cdot b \cdot (b-a) =$$

$$= ab + (1+a)^\mu \cdot (a-b)\cdot a + (1+b)^\mu \cdot b \cdot (b-a) =$$

$$= ab - (1+a)^\mu \cdot (b-a)\cdot a + (1+b)^\mu \cdot b \cdot (b-a) =$$

$$= ab + (b-a)\cdot \big((1+b)^\mu \cdot b - (1+a)^\mu \cdot a\big).$$

Itt $0 \le a \le b$ miatt, $b-a \ge 0$, így elég belátni, hogy $(1+b)^\mu \cdot b - (1+a)^\mu \cdot a \ge 0$.

Azaz elég belátni, hogy $(1+b)^\mu \cdot b \ge (1+a)^\mu \cdot a$. Ez pedig nyilván teljesül, mert $(1+b)^\mu \ge (1+a)^\mu$ fennáll $b \ge a$ miatt. Ezzel azt kaptuk, hogy $f(tx, ty, tz; \mu) \ge 0$, és itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a = b$. Az előzőek szerint ebből következik, hogy $f(x, y, z; \mu) \ge 0$ is teljesül, és itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a = b$, vagyis $tx = ty = tz$ esetén, azaz $x = y = z$ esetén. Ezzel ismét igazoltuk a Schur-féle egyenlőtlenséget.

E módszer ismert a szakirodalomban, de még eddig nem olvastam, hogy felhasználták volna a Schur-féle egyenlőtlenség igazolására.

Érdekes lehetne még tárgyalni a Schur-féle egyenlőtlenség különféle általánosításait és analógiáit. Másrészt különösen a középiskolai tanárok számára fontos lehetne ezen egyenlőtlenség egyes speciális eseteinek vizsgálata, mint középiskolai versenyfeladatok megoldása.

Irodalom

[1] Barnard, S. – J. M. Child, (1936). *Higher Algebra,* 1936. 217. oldal (Ezt a könyvet nem láttam.)

[2] Csete Lajos, (2002). Egyenlőtlenségek bizonyítására szolgáló módszerek, *A Matematika Tanítása,* 2002/2. 10–19. oldal

[3] Hardy, G. H. – J. E. Littlewood – G. Pólya, (1952). *Inequalities,* Cambridge at the University Press, Second Edition 1952. (First Edition 1934)
A könyvben a Schur-ra való hivatkozás a következőképpen történt a 64. oldalon:
„**81.** If $\upsilon \ge 0$, $\delta \ge 0$ and the a are positive and not all equal, then

$$[\upsilon + 2\delta, 0, 0, \alpha_4, \dots] - 2[\upsilon + \delta, \delta, 0, \alpha_4, \dots] + [\upsilon, \delta, \delta, \alpha_4, \dots] > 0.$$

[This result, communicated to us by Prof. I. Schur, is not a consequence of Theorem **45**, but follows from Theorem **80**, with $\mu = \upsilon/\delta$.]"

[4] Mitrinović, D. S., (1970). *Analytic Inequalities* (In cooperation with P. M. Vasić), Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970. 119–121.

[5] Mitrinović, D. S. – J. E. Pečarić – A. M. Fink, (1993). *Classical an New Inequalities in Analysis,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1993. 407. oldal.

[6] Levy, J. J., (1985). An easy proof for Schur's inequality, *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada,* **7** (1985), 159–160. (E cikket nem láttam, de a bizonyítását a Mitrinović – Pečarić – Fink-könyv 407. oldala közli.)

[7] Neville, E. H., (1956). Schur's inequality, *Mathematical Gazette,* **40** (1956), 216.

[8] Rigby, J. F., (1975). Sextic Inequalities for the Sides of a Triangle, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.,* No. 498–No. 541 (1975), 51–58.

[9] Watson, G. N., (1953). Two Inequalities, *Mathematical Gazette,* **37** (1953), 244–246.

[10] Watson, G. N., (1955). Schur's inequality, *Mathematical Gazette,* **39** (1955), 207–208.

[11] Wright, E. M., (1956). A generalization of Schur's inequality, *Math. Gazette,* **40** (1956), 217.

Köszönöm szépen Varga Ferencné könyvtárvezető (Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete) segítségét, és köszönöm szépen a lektor észrevételeit és munkáját.

Csete Lajos

Révai Miklós Gimnázium
9021 Győr
Jókai u. 21.

e-mail: csetelajos@revai.hu

ÖSSZEFÜGGÉSEK A KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁSBAN II. SZUBMODULÁRIS OPTIMALIZÁLÁS ÉS POLIÉDERES KOMBINATORIKA

FRANK ANDRÁS[1]

Tartalom

Bevezetés

A dolgozat első részében olyan konkrét gráfelméleti optimalizációs feladatokat tekintettünk át, melyekre létezik jó karakterizáció vagy min-max tétel (más szóval **NP** $\cap$ co-**NP**-ben vannak) továbbá létezik polinomiális futásidejű megoldó algoritmus is. A második részben magasabb szintre lépve bemutatjuk azokat az eszközöket, melyek megvilágítják, hogy mi is áll ezen eredmények hátterében. Miért működik a mohó algoritmus fákra és miért nem működik párosításokra? Mi a közös magja Egerváry maximális súlyú párosításokra vonatkozó 1.3.4. tételének, illetve Fulkerson legolcsóbb fenyőkről szóló, meglehetősen távolállónak tűnő 1.2.5. tételének? Mi kapcsolja össze Nash–Williams 3.4.2. irányítási tételét Lucchesi és Younger 2.2.3. tételével, amely egyirányú vágások minimális fedéséről szól? Mi teszi lehetővé a lánctulajdonság időnkénti meglétét?

[1]Készült az OTKA K60802 sz. pályázata valamint az Ericsson Hungary támogatásával.

Két fontos megközelítési módot mutatunk be. Az egyik a poliéderes kombinatorika, amely a lineáris programozás eszközeit használja diszkrét optimalizálási környezetben, a másik a szub- és szupermoduláris függvények széleskörű alkalmazhatóságára épül.

A poliéderes kombinatorika alapgondolata a következő. Tegyük fel, hogy bizonyos kombinatorikus objektumok (fák, utak, párosítások, Hamilton-körök, stb.) közül akarjuk a legjobbat kiválasztani. Ennek érdekében tekintjük ezen objektumok incidencia vektorainak konvex burkát. A lineáris programozás egyik alaptétele miatt $\mathbf{R}^n$ véges sok pontjának konvex burka mindig megadható véges sok féltér metszeteként, vagyis egy lineáris egyenlőtlenség rendszer megoldás halmazaként. Így ha a szóbanforgó egyenlőtlenségeket sikerül explicit alakban felírnunk, akkor a lineáris programozás dualitás tétele min-max tételt szolgáltat a kérdéses objektum maximális (vagy minimális) súlyára. Az ebből kiolvasható optimalitási feltételek pedig megállási szabályt jelentenek egy direkt algoritmus részére.

Látni fogjuk például, hogy a $G = (S, T; E)$ páros gráf teljes párosításainak konvex burka éppen az $R := \{x \in \mathbf{R}^E : Qx = 1,\ x \geq 0\}$ poliéder, ahol Q a páros gráf pont-él incidencia mátrixa. Ennek alapján Egerváryn ak az I. részben látott 1.3.4. tétele teljes párosítások maximális súlyáról rögvest kiadódik a lineáris programozás dualitás tételből. Annak igazolása pedig, hogy a konvex burok épp az R poliéder azon múlik, hogy a Q mátrix teljesen unimoduláris (TU). Ilyenkor ugyanis egész korlátozó vektor esetén mindig létezik egészértékű optimum. Ez a megközelítési mód minden olyan esetben eredményesen működik, amikor a lineáris program feltételi mátrixa teljesen unimoduláris. A dualitás tételt és/vagy a Farkas lemmát TU mátrixokra alkalmazva valóságos tétel-gyárat nyerhetünk. Kiderül, hogy az I. rész 1. fejezetének megannyi tétele és azok kiterjesztései megkaphatók ily módon (például az 1.5.1. max-folyam min-vágás tétel, Gallai 1.1.2. tétele, Hoffman 1.5.3. tétele vagy a minimális költségű folyamokra vonatkozó 1.5.5. tétel).

A TU mátrixok ilyen irányú használhatósága már ismert volt a múlt század ötvenes éveiben. J. Edmonds átütő felismerése volt, hogy a fenti megközelítés általánosabb esetekben is eredményes lehet. Ennek révén sikerült például algoritmikusan is megoldania a súlyozott párosítási problémát nem páros gráfra (ami nem témája a jelen dolgozatnak), vagy a súlyozott matroid metszet problémát, amit viszont ismertetni fogunk.

A matroidokkal el is értünk a szubmoduláris függvényekhez, mivel egy matroid rangfüggvénye ilyen. Látni fogjuk, hogy az I. részben bemutatott eredmények jelentős részének hátterében egy általánosabb, szub- (vagy szuper)moduláris optimalizálási probléma áll. Ez a felismerés teszi lehetővé, hogy algoritmikusan kezelni lehessen olyan konkrét gráf feladatokat, mint például a vegyes gráf k-élösszefüggővé irányítása, vagy egy digráf legolcsóbb gyökeresen k-összefüggő részgráfjának megtalálása, vagy egy (di)gráf legolcsóbb k-élösszefüggővé növelése pontindukált költségfüggvény esetén. A szubmoduláris függvények rendkívül hatékony eszközt jelentenek (amúgy) nehéz tételek rövid, egyszerű bizonyítására.

Ismert, hogy a folytonos optimalizálásban mennyire központi szerepet játszanak a konvex függvények. Több jel is arra mutat, hogy a szubmoduláris függvények hasonló szerepet töltenek be a diszkrét optimalizálásban. Valójában a két függvényosztály között szoros formai és tartalmi analógia van. A tárgyalást ennek bemutatásával kezdjük.

7. Matroidok és szubmoduláris függvények

7.1. Konvex és szubmoduláris függvények

Legyen S véges alaphalmaz. Az alábbiakban az S-en értelmezett halmazfüggvényekről automatikusan feltesszük, hogy egészértékűek és az üres halmazon az értékük 0. A $b : 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ halmazfüggvényről azt mondjuk, hogy **teljesen szubmoduláris**, vagy röviden szubmoduláris, ha

$$b(X) + b(Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y) \tag{7.1}$$

fennáll minden $X, Y \subseteq S$ halmazra. Belátható, hogy ha b teljesíti a szubmodularitási egyenlőtlenséget minden olyan X-re és Y-ra, amelyre $|X - Y| = |Y - X| = 1$, akkor b teljesen szubmoduláris. Egy $p : 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ halmazfüggvény **teljesen szupermoduláris,** ha $-p$ teljesen szubmoduláris. Egy h halmazfüggvény **monoton növő,** ha $X \subseteq Y \subseteq S$ esetén, amennyiben $h(X)$ véges, úgy $h(X) \leq h(Y)$. Egy véges-értékű, monoton növő, teljesen szubmoduláris függvényt **polimatroid függvény**nek hívunk. A véges-értékű m halmaz függvény **moduláris,** ha $m(X) + m(Y) = m(X \cap Y) + m(X \cup Y)$ fennáll minden $X, Y \subseteq S$-re. Ilyen függvényt, (ha $m(\emptyset) = 0$) az egyelemű halmazokon felvett értékei meghatároznak: $m(X) = \sum [m(s) : s \in X]$. Belátható, hogy egy b véges-értékű szubmoduláris függvény akkor és csak akkor moduláris, ha $b(v) + b(S - v) = b(S)$ minden $v \in S$ elemre.

Például egy $(S, T; E)$ páros gráfban az S részhalmazain definiált $b(X) := |\Gamma(X)|$ függvény polimatroid függvény, ahol $\Gamma(X)$ jelöli az $X \subseteq S$ halmaz T-beli szomszédainak halmazát. Egy irányítatlan gráf éleinek egy részhalmazához hozzárendelve az általa fedett pontok elemszámát polimatroid függvényt kapunk. Egy digráfban a ϱ befok függvény szubmoduláris.

Szubmodularitás és konvexitás között több ponton is érdekes analógia mutatkozik. Közismert, hogy egy differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha a deriváltja monoton növő. Ennek egyfajta diszkrét analogonja a következő könnyű eredmény.

7.1.1. tétel. *Egy b halmazfüggvény akkor és csak akkor szubmoduláris, ha az S alaphalmaz minden s elemére a $b(X + s) - b(X)$ különbség függvény az $S - s$ részhalmazain monoton csökkenő, azaz $X \subset Y \subseteq S - s$ esetén*

$$b(X + s) - b(X) \geq b(Y + s) - b(Y). \tag{7.2}$$

Ennél tartalmasabb kapcsolatot mutat az alábbi. Tetszőleges $b : 2^S \to \mathbf{R}$ halmazfüggvény, amelyre $b(\emptyset) = 0$, kézenfekvő módon kiterjeszthető n-dimenziós vektorokra, ahol $n = |S|$, a következőképpen. Adott $c \in \mathbf{R}^n$ vektorra indexeljük S elemeit úgy, hogy $c(s_1) \geq \cdots \geq c(s_n)$ és legyen $S_i := \{s_1, \dots, s_i\}$. Definiáljuk $\hat{b}(c)$-t a

$$\hat{b}(c) := c(s_n)b(S_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \big[c(s_i) - c(s_{i+1})\big] b(S_i) \tag{7.3}$$

képlettel. Látszik, hogy tetszőleges $Z \subseteq S$ halmazra $b(Z) = \hat{b}(\chi_Z)$, ahol χ_Z jelöli a Z halmaz karakterisztikus függvényét, (amelynek értéke tehát a Z elemein 1, míg az $S - Z$ elemein 0). Azt mondjuk, hogy $\hat{b}$ a b halmazfüggvény **lineáris kiterjesztése**. A fogalom és a következő megfigyelés Lovász [52]-es munkájában tűnik fel.

7.1.2. tétel (Lovász, 1983). *A b halmazfüggvény akkor és csak akkor szubmoduláris, ha $\hat{b}$ konvex.*

7.1.3. tétel. *Ha b szubmoduláris, akkor $\hat{b}$* **szubadditív,** *azaz tetszőleges $c_1, c_2, \dots, c_l \in \mathbf{R}^S$ vektorokra*

$$\sum_i \hat{b}(c_i) \geq \hat{b}(\sum_i c_i). \tag{7.4}$$

Speciálisan, tetszőleges $X_1, X_2, \dots, X_m \subseteq S$ halmazokra

$$\sum_i^m b(X_i) \geq \hat{b}(\sum_i^m \chi_{X_i}). \tag{7.5}$$

A tétel érdekessége, hogy Lovász az 1968-as Schweitzer verseny [48] egyik valószínűségszámítási feladatának megoldásában vette észre és igazolta a (7.5) egyenlőtlenség egy ekvivalens alakját. Bizonyításában tűnik fel a kikeresztezési eljárás, amelynek másik forrása D. Younger [58] dolgozata.

Az analógia persze nem tökéletes. Két konvex függvény minimuma konvex, de két szubmodulárisé általában nem szubmoduláris. Bizonyos esetekben azonban mégis csak az.

7.1.4. tétel (Lovász). *Legyenek b_1 és b_2 szubmoduláris függvények, melyekre $b_1 - b_2$ monoton növő. Ekkor a*

$$b(X) := \min\{b_1(X), b_2(X)\} \tag{7.6}$$

formulával definiált b függvény szubmoduláris.

Speciális esetként kapjuk, hogy egy monoton növő szubmoduláris és egy monoton csökkenő szubmoduláris függvény minimuma is szubmoduláris.

Végül egy olyan szituációt említünk, ahol az analógia ismét csak nagyon szoros. Közismert, hogy egy g konvex és egy f konkáv függvény elválasztható lineáris függvénnyel, ha $f \leq g$. Ennek diszkrét megfelelője a következő eredmény [25].

7.1.5. tétel (Diszkrét szeparációs tétel, 1984). *Legyen S alaphalmaz, $p : 2^S \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ szupermoduláris függvény és $b : 2^S \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ szubmoduláris függvény, melyekre $p(\emptyset) = b(\emptyset) = 0$. Akkor és csak akkor van olyan m moduláris függvény, amelyre $p \leq m \leq b$, ha*

$$p \leq b, \tag{7.7}$$

azaz ha $p(X) \leq b(X)$ fennáll minden $X \subseteq S$ halmazra. Ha p és b egészértékű és $p \leq b$, akkor az elválasztó m is választható egészértékűnek.

A tétel első része Lovász fenti 7.1.2. tétele nyomán közvetlenül adódik a konvex/konkáv szeparációs tételből, fő tartalma azonban a második rész, amely egészértékű elválasztást biztosít és így kombinatorikai következtetéseket tesz lehetővé.

Nagyon speciális példaként levezetjük a Kőnig–Hall féle 1.3.2. tételnek nemtriviális irányát. Legyen $(A, B; E)$ páros gráf, amelyre $|A| = |B|$. Az E élhalmaz F részhalmazain jelölje $b(F)$ az F által (legalább egyszer) fedett A-beli pontok számát, míg $p(F)$ az F által teljesen fedett B-beli pontokét. Ekkor b szubmoduláris, míg p szupermoduláris. A $p \leq b$ egyenlőtlenség épp a Hall-féle feltétellel ekvivalens (ami szerint A minden j elemű részhalmazának legalább j szomszédja van B-ben). Ezért ha a Hall feltétel fennáll, akkor létezik egy $m : E \to \mathbf{Z}$ egészértékű szeparáló függvény, amely szükségképpen $0-1$ értékű, hiszen $0 \leq p(e) \leq b(e) \leq 1$ minden e élre. Az $M = \{e \in E : m(e) = 1\}$ halmaz olyan, hogy minden B-beli v pontot fed, hiszen a v-vel szomszédos élek F halmazára $1 = p(F) \leq m(F) = d_M(v)$. Hasonlóképp, minden A-beli u pontra az u-val szomszédos élek H halmazára $1 = b(H) \geq m(H) = d_M(u)$. Ebből és $|A| = |B|$-ből következik, hogy M teljes párosítás.

Természetesen a Hall-tételre megannyi sokkal egyszerűbb és direkt bizonyítás ismeretes, e levezetés csupán azt kívánta érzékeltetni, hogy a Hall-tétel a diszkrét szeparációs tétel speciális eseteként interpretálható.

K. Murota a diszkrét szeparációs tételt nagymértékben továbbfejlesztve teljes elméletet épített ki diszkrét konvex függvényekről [54].

7.2. Matroidok

A fenti szép analógia konvex és szubmoduláris függvények között még egy helyen megmutatkozik. Ismeretes, hogy konvex függvény lokális minimum helye egyúttal globális is. Ennek egyfajta diszkrét ellenpárjának tekinthető az I. rész 1.2.3. tétele, ami szerint egy élsúlyozott gráfban egy F feszítő fa akkor és csak akkor minimális súlyú, ha lokális cserével nem lehet javítani, azaz ha minden e nem-fa él súlya legalább akkora, mint az $F + e$ alapköréből vett bármely él súlya. Ez viszont lényegében ekvivalens a Kruskal féle mohó algoritmus helyességével. Kiderül, hogy vannak más szituációk is, amikor egy Kruskal típusú mohó algoritmus helyes eredményre vezet. Igazolható például, hogy ha egy mátrix minden oszlopának adott a súlya, akkor maximális össz-súlyú lineárisan független oszlopokat a mohó algoritmus segítségével kereshetünk meg (támaszkodva a Gauss eliminációra).

A lényeg az, hogy mind egy gráf részerdői, mind egy mátrix oszlopainak lineárisan független részhalmazai matroidot alkotnak. Legyen S véges halmaz és $\mathcal{F}$ az S részhalmazainak egy rendszere, melynek tagjait **független**nek hívjuk. Az $(S, \mathcal{F})$ párt **matroid**nak nevezzük, ha *(a)* az üres halmaz független, *(b)* független halmaz részhalmaza független, és *(c)* minden $Z \subseteq S$ részhalmazra a Z-be eső, Z-ben már tovább nem bővíthető független halmazok elemszáma ugyanaz a csupán Z-től függő $r(Z)$ szám (amely számot a Z részhalmaz **rang**jának neveznek). A harmadik tulajdonság azzal ekvivalens, hogy a mohó algoritmus minden $0-1$-es súlyfüggvényre maximális súlyú független halmazt szolgáltat. A maximális elemszámú független halmazok a matroid **bázisai**, míg egy halmaz **generátor**, ha tartalmaz bázist. Igazolható, hogy a generátorok komplementereiből álló halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat. Az így nyert M^* matroidot az M duálisának hívják. A név onnan van, hogy $(M^*)^* = M$, azaz duális duálisa az eredeti matroid. Az M függetlenjeinek komplementerei éppen az M^* generátorai.

A gráf körmatroidja (amelyben a független halmazok a részerdők) és a mátrixmatroid (ahol a függetlenség a lineáris függetlenség) mellett egyszerű, de fontos osztályt alkotnak a partíciós matroidok. Ebben egy halmaz független, ha az alaphalmaz egy adott partíciójának minden osztályába legfeljebb egy előre adott számú elemmel metsz bele.

Egy matroid rangfüggvénye a definícióból adódóan nemnegatív, egészértékű, szubkardinális (azaz $r(X) \leq |X|$ minden $X \subseteq S$ részhalmazra és monoton növő $(r(X) \leq r(Y)$, ha $X \subseteq Y)$. Könnyen belátható továbbá, hogy a rangfüggvény szubmoduláris. Megfordítva, érvényes, hogy egy ilyen tulajdonságokkal bíró halmazfüggvény egy matroid rangfüggvénye. (Röviden a matroid rangfüggvénye egy szubkardinális polimatroid függvény.)

Rokon fogalom a matroid t **ko-rang függvénye**: $t(X)$ az X és egy bázis metszetének minimális elemszáma. Fennáll az egyszerű $t(X) = r(S) - r(S - X)$ összefüggés, ami miatt t szupermoduláris.

7.2.1. Mohó algoritmus

Tegyük fel, hogy az M matroid S alaphalmazán adott egy $c : S \rightarrow \mathbf{R}$ súlyfüggvény. A maximális súlyú bázis előállításához a mohó algoritmus egymás után választ elemeket a következő szabály szerint. Az első lépésben kiválasztja az egyik maximális súlyú elemet, amely nem hurok. Az általános lépésben az addig kiválasztott F független halmazról eldönti, hogy bázis-e. Ha igen, az eljárás a kapott bázis kiadásával véget ér. Ha nem, akkor megnöveli F-t egy olyan maximális súlyú $x \in S - F$ elemmel, amelyre $F + x$ független. A fákra vonatkozó mohó algoritmust általánosítja a következő.

7.2.1. tétel (Edmonds, 1971). *A fenti mohó algoritmus maximális súlyú bázist szolgáltat.*

A mohó algoritmus segítségével explicit kifejezhető a c súlyozásra vonatkozó maximális súlyú bázis súlya.

7.2.2. tétel (Edmonds, 1971). *Az $M = (S, r)$ matroidban tetszőleges $c : S \to \mathbf{R}$ súlyozásra a maximális bázis súlya $\hat{r}(c)$, ahol $\hat{r}$ az r rangfüggvénynek a (7.3) formulával definiált lineáris kiterjesztése.*

Matroidok segítségével azonban sokkal bonyolultabb optimalizálási kérdések is megválaszolhatók. Néhányat említünk. Mikor lehet és miképp egy gráfban k élidegen feszítő fát találni? Ha létezik k élidegen feszítő fa, hogyan lehet úgy meghatározni őket, hogy az összköltségük minimális legyen? Hogyan lehet egy irányított gráfnak olyan minimális költségű részgráfját meghatározni, amelyben egy megadott gyökérpontból minden más csúcsba vezet k élidegen (vagy pontidegen) út?

7.2.2. Matroid metszet

Nemcsak Kruskal mohó algoritmusa terjeszthető ki matroidokra, hanem a párosításokra vonatkozó Kőnig–Hall-tétel is. Legyen $G = (S, T; E)$ egyszerű páros gráf, M az S-n lévő matroid. G egy párosítását akkor nevezzük M-**független**nek, ha az általa fedett S-beli pontok halmaza független M-ben. $X \subseteq T$ halmazra jelölje $\Gamma(X)$ az X szomszédainak halmazát, azaz $\Gamma(X) := \{v \in S : v\text{-nek van szomszédja } X\text{-ben}\}$. A Hall-tétel matroidos általánosítása R. Radotól [56] származik.

7.2.3. tétel (Rado, 1942). *Legyen adva a $G = (S, T; E)$ páros gráf S pontosztályán egy $M = (S, r)$ matroid. Az olyan párosítás maximális elemszáma, amely S-ben a matroid egy független ponthalmazát fedi egyenlő a $\min_{X \subseteq T} \big\{ r\big(\Gamma(X)\big) + |T - X| \big\}$ értékkel. Speciálisan, akkor és csak akkor létezik T-t fedő M-független párosítás, ha minden $X \subseteq T$ esetén teljesül a Rado-féle feltétel:*

$$r\big(\Gamma(X)\big) \geq |X|. \tag{7.8}$$

A kombinatorikus optimalizálás egyik központi eredménye J. Edmonds [9] metszet-tétele, amely tartalmilag ekvivalens ugyan a Rado-tétellel, de általánosabb megfogalmazása miatt alkalmazásokban jobban használható.

7.2.4. tétel (Edmonds, 1970). *Az S alaphalmazon adott két matroid, melyek rangfüggvénye r_1 és r_2. A közös független halmazok maximális elemszáma egyenlő a*

$$\min_{X \subseteq S} \{ r_1(X) + r_2(S - X) \} \tag{7.9}$$

értékkel.

Edmonds bizonyítása [15] algoritmikus és az alternáló utas módszer kiterjesztésének tekinthető. A metszet-tétel egy ekvivalens megfogalmazása szerint az M_1 és M_2 matroidnak, melyekre $r_1(S) = r_2(S) = k$ akkor és csak akkor van közös bázisa, ha minden $X \subseteq S$-re $t_2(X) = k - r_2(S - X) \leq r_1(X)$ vagy tömören $t_2 \leq r_1$, ahol t_2 az M_2 ko-rangfüggvénye. Ez viszont nem más, mint a diszkrét szeparációs tétel a szupermoduláris t_2 és szubmoduláris r_1 függvényekre, hiszen az ezeket szeparáló egészértékű moduláris függvények $0-1$-értékűek, így pontosan a közös bázisok karakterisztikus vektorai.

A következő, matroid metszethez kapcsolódó eredmény egyik érdekessége, hogy ismét feltűnik a lánctulajdonság. A tétel nem más, mint a fokszámkorlátos feszítő fa létezéséről szóló 3.2.3. tétel matroidos kiterjesztése.

7.2.5. tétel. *Adott az S alaphalmazon egy r rang- és t ko-rangfüggvényű M matroid valamint S-nek egy $\mathcal{P}$ partíciója. M-nek akkor és csak akkor létezik olyan B bázisa, amelyre*

(i) $|X \cap B| \leq g(X)$ *minden $X \in \mathcal{P}$-re, ha minden $Z \in \mathcal{P}^*$ halmazra fennáll*

$$g(Z) \geq t(Z), \text{ vagy ekvivalensen } g(Z) + r(S-Z) \geq r(S), \tag{7.10}$$

(ii) $|X \cap B| \geq f(X)$ *minden $X \in \mathcal{P}$-re, ha minden $Z \in \mathcal{P}^*$ halmazra fennáll*

$$f(Z) \leq r(Z) \tag{7.11}$$

(iii) $f(X) \leq |X \cap B| \leq g(X)$ *minden $X \in \mathcal{P}$-re, ha külön-külön létezik* (i)*-t kielégítő és* (ii)*-t kielégítő bázis, azaz minden $Z \in \mathcal{P}^*$ halmazra mind* (7.10), *mind* (7.11) *fennáll.*

7.2.3. Súlyozott matroid metszet

Egy páros gráf maximális súlyú teljes párosítási valamint egy digráf legolcsóbb feszítő fenyő feladatának közös általánosításaként Edmonds [9] megoldotta két matroid maximális súlyú közös bázisának problémáját is. Egyrészt egy lineáris programozáson alapuló min-max formulát adott a maximális súlyú közös bázis súlyára (lásd később a 10.1.5. tételt), másrészt egy polinomiális algoritmust is leírt [15] ennek kiszámítására.

Létezik azonban az eredetinél áttekinthetőbb min-max tétel [23], amely sokkal egyszerűbb súlyozott matroid metszet algoritmus leírásást tette lehetővé. Mindezek Egerváry 1.3.4. tételének és Kuhn Magyar módszerének közvetlen kiterjesztéseként interpretálhatók. A [31] magyar nyelvű összefoglaló pedig rövid bizonyítást is tartalmaz, amely Egerváry eredeti bizonyításának közvetlen általánosítása.

Legyen adott az S alaphalmazon két matroid, M_1 és M_2, továbbá egy $c: S \to \mathbf{Z}$ egészértékű (!) súlyfüggvény. Tegyük fel, hogy az M_1 és M_2 matroidoknak van közös bázisa, melynek elemszámát jelölje k. Valamely $x: S \to \mathbf{Z}$ súlyfüggvényre jelölje $\hat{r}_i(x)$ az M_i matroidban a maximális x-súlyú bázis súlyát (lásd a 7.2.2. tételt).

7.2.6. tétel (Frank, 1981). *Az M_1 és M_2 matroidok közös bázisainak maximális c-súlya egyenlő a*

$$\min\{\hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2) : c_1 + c_2 = c,\ c_i \text{ egészértékű}\} \tag{7.12}$$

értékkel. Egy B közös bázis akkor és csak akkor maximális c-súlyú, ha létezik c-nek egy egészértékű $c_1 + c_2$ felbontása úgy, hogy B egyrészt az M_1-nek maximális c_1-súlyú bázisa, másrészt az M_2-nek maximális c_2-súlyú bázisa.

A tételben megfogalmazott optimalitási kritérium teremt lehetőséget egy viszonylag egyszerű erősen polinomiális súlyozott matroidmetszet algoritmus megkonstruálására ([23], magyarul: [47]).

7.2.4. Matroidok összege

A matroid metszet-tételhez hasonlóan fontos a matroid partíciós tétel. Legyen adott az S alaphalmazon k matroid. Nevezzünk egy $X \subseteq S$ halmazt **partícionálható**nak, ha előáll az egyes matroidokból vett (összesen k darab) független halmaz uniójaként.

7.2.7. tétel (Edmonds és Fulkerson, 1965). *A partícionálható halmazok egy matroid független halmazait alkotják. Az S legnagyobb partícionálható részhalmazának r_Σ elemszáma egyenlő a*

$$\min_{X \subseteq S} \left\{ |S - X| + \sum_i r_i(X) \right\} \tag{7.13}$$

értékkel.

Egyszerű konstrukciók segítségével kimutatható, hogy a metszet-tétel és a matroid partíciós tétel egymással ekvivalens. A partícionálható halmazok matroidját a k matroid **összegé**nek nevezik. A tételből kiolvasható, hogy az alaphalmaz mikor fedhető le k bázissal és hogy mikor létezik k páronként diszjunkt bázis.

7.2.8. tétel (Edmonds, Nash–Williams: fedő bázisok tétele). *Adott az S alaphalmazon k matroid, melyek rangfüggvénye $r_1, \ldots, r_k$. S akkor és csak akkor bomlik fel k halmaz egyesítésére úgy, hogy az i-edik halmaz független az i-edik matroidban, ha*

$$\sum_i r_i(X) \geq |X| \tag{7.14}$$

fennáll minden $X \subseteq S$ részhalmazra.

7.2.9. tétel (Edmonds: diszjunkt bázisok tétele). *Adott az S alaphalmazon k matroid, melyek rang-függvénye r_i és ko-rang függvénye t_i $(i = 1, \ldots, k)$. Akkor és csak akkor létezik S-nek k diszjunkt részhalmaza úgy, hogy az i-edik halmaz bázis az i-edik matroidban, ha*

$$\sum_i t_i(X) \leq |X| \tag{7.15}$$

fennáll minden $X \subseteq S$ részhalmazra, ami viszont azzal ekvivalens, hogy $\sum_i \left[r_i(S) - r_i(Y)\right] \leq |S - Y|$ fennáll minden $Y \subseteq S$ részhalmazra.

A matroidok rugalmasságát jól mutatja, hogy a 7.2.8. tételből levezethető a következő általánosítása.

7.2.10. tétel. *Az M_i matroidok I_i független halmazai ($i = 1, \dots, k$) akkor és csak akkor egészíthetők ki S-t fedő független halmazokká, ha*

$$\sum_i \left[r_i(X \cup I_i) - |I_i| \right] \geq |X| \tag{7.16}$$

fennáll minden $X \subseteq S - (\cup_i U_i)$ részhalmazra.

7.2.5. Matroidok szub- és szupermoduláris függvényekből

E tételek alkalmazhatóságát nagyban elősegíti, ha hatékony eszközök állnak rendelkezésünkre matroidok előállítására. Egy ilyen Edmondstól [9] származó eszköz azon a megfigyelésen múlik, hogy egy matroid rangfüggvénynél gyengébb tulajdonságú függvények is képesek matroidot definiálni. Nem kell például megkövetelni a szubkardinalitást vagy a monotonitást.

7.2.11. tétel (Edmonds, 1970). *Amennyiben $b : 2^S \to \mathbf{Z}_+\{+\infty\}$ nemnegatív, egészértékű, teljesen szubmoduláris halmazfüggvény, úgy az $\mathcal{F}_b := \{I \subseteq S : |Y \cap I| \leq b(Y)$ minden $Y \subseteq S$-re$\}$ halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat. A kapott $M = (S, \mathcal{F}_b)$ matroid rangfüggvénye a következő:*

$$r_b(Z) = \min\{b(X) + |Z - X| : X \subseteq S\}. \tag{7.17}$$

Ha ráadásul b monoton növő (azaz polimatroid függvény), *akkor $\mathcal{F}_b$ definíciójában elég az $Y \subseteq I$ részhalmazokra szorítkozni, míg a* (7.17) *minimum formulában az $X \subseteq Z$-kre.*

Ráadásul, még a szubmodularitást is enyhíthetjük, és ez alkalmazásokban különösen gyümölcsözőnek bizonyul majd. A b halmazfüggvényről azt mondjuk, hogy **metsző,** illetve **keresztező szubmoduláris**, ha a 7.1 szubmodularitási egyenlőtlenség fennáll minden metsző, illetve keresztező $X, Y \subseteq S$ halmazra. (X, Y **metsző**, ha $X \cap Y$ nemüres. Ha ráadásul $X - Y, Y - X, S - (X \cup Y)$ egyike sem üres, akkor X, Y **keresztező**.)

7.2.12. tétel (Edmonds, 1970). *Amennyiben $b : 2^S \to \mathbf{Z}_+\{+\infty\}$ nemnegatív, egészértékű, metsző szubmoduláris halmazfüggvény, úgy az $\mathcal{F}_b := \{I \subseteq S : |Y \cap I| \leq b(Y)$ minden $Y \subseteq S$-re$\}$ halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat. A kapott $M = (S, \mathcal{F}_b)$ matroid rangfüggvénye a következő:*

$$r_b(Z) = \min\left\{ \sum_{i=1}^{t} b(X_i) + \left|Z - (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t)\right| : \{X_1, \dots, X_t\} \text{ részpartíciója } S\text{-nek} \right\}. \tag{7.18}$$

Alkalmazásokban néha szupermoduláris függvények szerepelnek szubmoduláris helyett. Legyen $p : 2^S \to \mathbf{Z}$ metsző szupermoduláris halmazfüggvény, amelyre $p(\emptyset) = 0$ és $p(X) \leq |X|$ minden $X \subseteq S$ halmazra fennáll.

7.2.13. tétel. *A* $\mathcal{G}^p := \{Z \subseteq S : |Z \cap X| \geq p(X)$ *minden* $X \subseteq S$ *halmazra*$\}$ *halmazrendszer egy* M^p *matroid generátorainak rendszere. A matroid ko-rangja egyenlő a*

$$\max\Big\{\sum_i p(X_i) : \{X_1, \dots, X_t\} \text{ részpartíciója } S\text{-nek}\Big\} \tag{7.19}$$

értékkel.

Keresztező szupermoduláris függvények segítségével ezen a módon már nem lehet egy matroid generátorainak halmazát definiálni. A bázisait azonban igen!

7.2.14. tétel (Frank és Tardos, 1981). *Legyen* k *pozitív egész, és* $p : 2^S \to \mathbf{Z}\{-\infty\}$ *egészértékű, keresztező szupermoduláris halmazfüggvény. Ha a* $\mathcal{B}^p := \{B \subseteq S : |B| = k,\ |Y \cap B| \geq p(Y)$ *minden* $Y \subseteq S$*-re*$\}$ *halmazrendszer nemüres, akkor egy matroid bázisainak halmazát alkotja.*

7.3. Matroidok alkalmazásai

Felbontás összefüggő részekre. A 7.2.10. tételből nemcsak a gráfok fákkal történő fedéséről szóló Nash–Williams 4.3.3. tétel vezethető le, hanem a 4.3.4. tételben megfogalmazott általánosítás is egy megkezdett fedés befejezhetőségéről. Hasonlóképp, a diszjunkt bázisok tételéből levezethető Tutte 4.2.8. tétele diszjunkt feszítő fák létezéséről. E megközelítést általánosítva Tutte tételét hipergráfokra is sikerült kiterjeszteni. Egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráfot akkor nevezünk k**-partíció-összefüggő**nek, ha a V alaphalmaz bármely t-részes partíciójára a legalább két részt metsző hiperélek száma legalább $k(t-1)$. A $k = 1$ esetben röviden azt mondjuk, hogy a hipergráf **partíció-összefüggő**. Ez gráf esetén egybeesik az összefüggőség fogalmával, tetszőleges hipergráfra azonban annál erősebb: a $\big(V = \{a, b, c\}$, $\mathcal{E} = \{V\}\big)$ hipergráf összefüggő, de nem partíció-összefüggő. Ennek megfelelően Tutte diszjunkt fa tételének kétféle általánosítása is felvethető hipergráfokra annak megfelelően, hogy a hipergráf éleit úgy akarjuk k osztályba sorolni, hogy mindegyik osztály összefüggő hipergráfot határoz meg avagy partíció-összefüggőt. Kimutatható, hogy az összefüggő hipergráfokra bontás már a $k = 2$ esetben is **NP**-teljes, a második kérdésre azonban érvényes a Tutte tétel következő általánosítása [33].

7.3.1. tétel (Frank, Király és Kriesell, 2003). *Egy hipergráf akkor és csak akkor* k*-partíció összefüggő, ha felbomlik* k *partíció-összefüggő részhipergráfra.*

Ahogy Tutte 4.2.8. tételéből közvetlenül kiolvasható, hogy egy $2k$-élösszefüggő gráf tartalmaz k élidegen feszítő fát, úgy a 7.3.1. tétel az alábbi következményre vezet.

7.3.2. következmény. *Ha egy* (qk)*-élösszefüggő hipergráf minden hiperéle legfeljebb* q *elemű, akkor a hipergráf felbontható* k *darab partíció-összefüggő* (és így összefüggő) *hipergráfra.*

Optimális fák. A maximális (vagy minimális) súlyú feszítő fa feladatának két nagyfokú általánosítása is megoldható a súlyozott matroid metszet algoritmus segítségével.

(A) Adott egy irányítatlan gráf élhalmazán a $c_1, \dots, c_k$ költségfüggvényekkel. Keressünk $F_1, \dots, F_k$ élidegen feszítő fákat úgy, hogy a $\sum_i c_i(F_i)$ összköltség a lehető legkisebb legyen.

(B) A $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf pontjainak egy T stabil halmazán adott az $f_T : T \to \mathbf{Z}_+$ és a $g_T : T \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ függvény, melyekre $f_T \leq g_T$. A 7.2.5. tételből levezethető a 3.2.3. tétel, amely fokszám-korlátoknak eleget tevő feszítő fa létezéséről szólt. Amennyiben még egy költségfüggvény is adott az élhalmazon, úgy a legolcsóbb fokszámkorlátos feszítő fa is kiszámítható a súlyozott matroid metszet algoritmus segítségével. Ha minden csúcson adott egy felső korlát és nem csupán egy stabil halmaz elemein, akkor a fokszám-korlátos fa problémája NP-teljes.

Gyökeres k-összefüggőség. Ugyancsak a súlyozott matroid metszet segítségével oldható meg az alábbi feladat.

(A) Adott egy irányított gráf egy kijelölt s gyökérrel és egy c költségfüggvénnyel az élhalmazon. Keressünk minimális költségű részgráfot, amelyben s-ből minden csúcshoz vezet k élidegen irányított út. A $k = 1$ speciális esetben visszajutunk a legolcsóbb feszítő fenyő problémájához és az erre vonatkozó Fulkerson tételhez.

(B) Egy digráfban keressünk minimális költségű részgráfot, amelyben s-ből minden csúcshoz vezet k pontidegen irányított út. Az (A) feladat ezen pontidegen változatáról csak nemrégiben [36] derült ki, hogy szintén megoldható a súlyozott matroid metszet segítségével, bár itt a visszavezetés már ravaszabb.

Irányítás. A 7.2.14. tételben leírt konstrukció segítségével megmutatható [34], hogy egy gráf (sőt egy vegyes gráf) k-élösszefüggővé irányításának feladata megfogalmazható matroid metszet problémaként, hasonlóképp egy digráf egyirányú vágásainak minimális lefogásához.

Diszjunkt fenyők. Edmonds 4.2.2. diszjunkt fenyő tétele k élidegen, azonos gyökerű fenyő létezésének feltételét adta meg. Mi a helyzet, ha a gyökereknek különbözőknek kell lennie? A 7.2.13. tételből közvetlenül kiolvasható az alábbi eredmény, amely egyébként a 4.2.9. tétel speciális esete.

7.3.3. tétel. *Egy $D = (V, E)$ digráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fenyő, melyek gyökerei különbözőek, ha V minden $\{X_1, X_2, \dots, X_t\}$ részpartíciójára*

$$\sum_i \varrho(X_i) \geq k(t-1). \tag{7.20}$$

Digráfok forráshalmazai. Legyen $D = (V, A)$ olyan irányított gráf, amelynek legalább $k+1$ csúcsa van és amelyben nincsenek egyirányú párhuzamos élek.

A $Z \subseteq V$ halmazra és $v \in V$ csúcsra jelölje $\kappa^+(Z, v)$ a Z-ből v-be vezető (v-től eltekintve) diszjunkt irányított utak maximális számát. Nevezzünk egy Z halmazt **k-forrás**nak, ha Z-ből minden $v \in V - Z$ csúcsba vezet k darab (v-től eltekintve) diszjunkt irányított út. Nagamochi, Ishii és Ito [55], meglehetősen bonyodalmasan, igazolták a következőt.

7.3.4. tétel (Nagamochi, Ishii, Ito, 2001). *A k-források egy matroid generátorait alkotják.*

Valójában ez néhány sorban levezethető [2]. Menger tétele miatt ugyanis egy Z halmaz pontosan akkor k-forrás, ha $|\Gamma^-(X)| \geq k$ fennáll minden nemüres $X \subseteq V - Z$ halmazra, ahol $\Gamma^-(X)$ jelöli azon $V - X$-beli pontok halmazát, melyekből vezet X-be él. Jelölje V_k a legalább k befokú pontok halmazát és definiáljuk a $b : 2^{V_k} \to \mathbf{Z}$ függvényt úgy, hogy $b(X) := |\Gamma^-(X)| + |X| - k$, ha $X \neq \emptyset$. Ekkor b nemnegatív, monoton növő és metszőn szubmoduláris, így alkalmazható a 7.2.12. tétel. Az $M = (V_k, \mathcal{F}_b)$ matroidban egy $I \subseteq V_k$ halmaz pontosan akkor független, ha minden $X \subseteq I$ nemüres részhalmazra $b(X) \geq |X|$, azaz $|\Gamma^-(X)| \geq k$ fennáll, vagyis ha a $V - I$ halmaz k-forrás. Tehát a k-források az M duálisának generátorai.

Ráadásul ezen megközelítéssel az alábbi min-max formula is közvetlenül kiolvasható.

7.3.5. tétel. *A minimális k-forrás elemszáma egyenlő a*

$$(7.21) \qquad |V - V_k| + \max\left\{ \sum_i \left[k - |\Gamma^-(X_i)|\right] : \{X_1, \ldots, X_t\} \text{ a } V_k \text{ részpartíciója} \right\}$$

maximummal.

Merev gráfok. Tegyük fel, hogy egy G gráf csúcsait „általános helyzetben" elhelyeztük a síkon, azaz a csúcsok koordinátái között nincs algebrai összefüggés. A gráf éleit merev rudakkal, a csúcsait pedig csuklókkal valósítjuk meg, amelyek körül az élek (a síkban) elfordulhatnak. A G-t akkor nevezzük **merev**nek, ha az így kapott csuklós szerkezet merev (ami egy bizonyos változós mátrix rangjára tett kikötéssel írható le pontosan). Egy gráf **minimális merev,** ha merev, de bármely élét elhagyva már nem az. G. Laman [46] az alábbi 7.3.6. tételben jellemezte a minimális merev gráfokat.

7.3.6. tétel (Laman, 1970). *Egy $G = (V, E)$ egyszerű gráf akkor és csak akkor minimális merev, ha $|E| = 2n - 3$ és*

$$(7.22) \qquad i_G(Z) \leq 2|Z| - 3 \text{ minden } Z \subseteq V,\ |Z| \geq 2\text{-re},$$

ahol $i_G(Z)$ a Z által feszített élek számát jelöli.

Kérdés, hogy miként lehet leírni a merev gráfokat, illetve, ha a gráf nem merev, minimálisan hány új él hozzáadásával tehető azzá? A válaszra az teremt lehetőséget, hogy a merevség mögött matroidos struktúra húzódik. Jelölje $G^* = (V, E^*)$ a teljes gráfot V-n. Az E^* élhalmazon vezessük be a b^* halmazfüggvényt a következőképpen. Legyen $b^*(\emptyset) = 0$ és $\emptyset \subset F \subseteq E^*$-ra legyen

$$b^*(F) := 2\big|V(F)\big| - 3, \tag{7.23}$$

ahol $V(F)$ jelöli az F-ben lévő élek végpontjainak halmazát. Ekkor b^* metsző szubmoduláris, így a 7.2.12. tételből kiolvasható, hogy egy merev gráf merev részgráfjai egy M_G matroid generátorait alkotják, amelynek rangfüggvényére vonatkozó a (7.18) formulából azonnal kiolvasható Lovász és Yemini [51] klasszikusnak számító tétele.

7.3.7. tétel (Lovász és Yemini, 1982). *Egy $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor merev, ha $r(M_G) = 2n - 3$, azaz E minden $\{E_1, \dots, E_k\}$ partíciójára $\sum_i b^*(E_i) \geq 2n - 3$. Ha G nem merev, akkor azon élek minimális száma, melyek hozzáadásával G merevvé tehető, egyenlő a*

$$2n - 3 - \min\Big\{\sum_i b^*(E_i) : \{E_1, \dots, E_k\} \text{ partíciója } E\text{-nek}\Big\} \tag{7.24}$$

értékkel.

7.3.1. Algoritmus

A 7.2.12. tétel elvi lehetőséget kínál az $r_b(Z)$ rang kiszámítására. Ehhez egy olyan szubrutinra van szükség, amely bármely $F \subset S$ halmazra és $s \in A - F$ elemre megadja a $\beta(F, s) := \min\Big\{\big(b(Y) - |Y \cap F| - 1\big) : s \in Y \subseteq S\Big\}$ értéket és a minimalizáló Y halmazt. Ennek felhasználásával ugyanis egy rögzített sorrendben végigmegyünk a Z elemein és mohó módon kiválasztunk egy független halmazt. Az általános lépésben az eddig kiválasztott F független halmazhoz akkor vesszük hozzá a soron következő $s \in S - F$ elemet, ha $\beta(F, s) \geq 0$.

Hasonló algoritmus adható a 7.2.13. tételben szereplő matroid rangjának meghatározására. Miután mindegyik említett alkalmazásban a szükséges szubrutin valamely folyamalgoritmus segítségével előállítható, a szóbanforgó problémák algoritmikusan is kezelhetők. Így például a matroid metszet tételt (és algoritmust) használva kiszámítható egy digráf pontjainak legkisebb (költségű) olyan S részhalmaza, amelyből minden $v \in V - S$ pontba vezet k diszjunkt út és amelybe minden $v \in V - S$ pontból vezet l diszjunkt út. Hasonlóképp, egy gráfról algoritmikusan el tudjuk dönteni, hogy merev-e vagy sem. Nem ismeretes viszont sem algoritmus, sem min-max tétel a legkisebb elemszámú olyan élhalmazra, melynek elhagyása megszünteti egy gráf merevségét, és azt sem tudjuk, hogy a feladat NP-teljes volna.

7.4. Metsző szupermoduláris függvények fedése digráffal

A matroidokról szóló részben láttuk, hogy Rado 7.2.3. tétele miként általánosítja a Kőnig–Hall-tételt. Egy másirányú általánosítás Lovász [49] nevéhez fűződik:

7.4.1. tétel (Lovász, 1970). *Legyen $p : 2^S \to \mathbf{Z}_+$ pozitívan metsző szupermoduláris függvény, amelyre ráadásul minden $A \subseteq S$, $v \in S - A$ esetén*

$$p(A) + p(v) \geq p(A + v). \tag{7.25}$$

Amennyiben $G = (S, T; E)$ egy olyan egyszerű páros gráf, amelyre $|\Gamma_E(X)| \geq p(X)$ minden $X \subseteq S$ halmazra fennáll, de G bármely élét kihagyva ez már nem teljesül, akkor $d_E(v) = p(v)$ minden $v \in S$-re.

Lovász ennek segítségével igazolta Erdős egy sejtését, miszerint, ha egy hipergráfra erősen teljesül a Hall-féle feltétel, azaz bármely $j \geq 1$ hiperél egyesítése legalább $j + 1$ elemű, akkor az alaphalmaz pontjait két színnel lehet színezni úgy, hogy ne legyen egyszínű hiperél.

Kiderül azonban, hogy mind a Rado-tétel, mind Lovász tétele valójában egy általánosabb eredmény speciális esete, amely ráadásul még Vidyasankar fedő fenyőkről szóló 4.3.5. tételét is magában foglalja. Egy $D = (V, A)$ digráfban egy $X \subseteq V$ halmaz $B(X)$ bejárata a $B(X) := \{v \in X$: létezik olyan $uv \in A$ él, amelyre $u \in V - X\}$ halmaz volt. Valamely $g : V \to \mathbf{Z}_+$ függvényre legyen $\beta_g(X) := \sum [g(v) : v \in B(X)]$. Kimutatható, hogy a β_g függvény szubmoduláris, és ezen alapul a következő eredmény [27].

7.4.2. tétel (Frank és Tardos, 1989). *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $g : V \to \mathbf{Z}_+$ felső korlát függvény a csúcshalmazon. Legyen p pozitívan metsző szupermoduláris függvény. Akkor és csak akkor létezik olyan egészértékű $x : A \to \mathbf{Z}_+$ függvény, amelyre $\varrho_x(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V$ részhalmazra és $\varrho_x(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra, ha minden $X \subseteq V$ halmazra*

$$p(X) \leq \beta_g(X). \tag{7.26}$$

Meglepő módon, ha a 7.4.2. tételben a pontok befokai helyett a kifokokra írunk elő felső korlátot, úgy már NP-teljes problémákhoz jutunk, ugyanis a Hamilton út probléma megfogalmazható ilyen alakban.

7.4.1. Következmények

Vidyasankar tétele újra. Megfigyelve, hogy a $p(X) := (k - \varrho(X))^+$ $(\emptyset \subset X \subseteq V - s)$ függvény pozitívan metsző szupermoduláris, valamint azt, hogy a $g(v) := p(v)$ $(v \in V - s)$ függvényre a (4.8) és (7.26) feltételek ekvivalensek, speciális esetként megkapjuk Vidyasankar 4.3.5. tételét egy digráf éleinek k darab feszítő s-fenyővel történő fedhetőségéről.

Egyirányú vágások lefogása. A Lucchesi–Younger tétel egyirányú vágások minimális lefogásával foglalkozott. Most olyan lefogás létezésére vagyunk kíváncsiak, melyben a pontok befokaira korlát adott. A következő tételben érdekes megfigyelni Tutte 1-faktor tételével való formai analógiát.

7.4.3. tétel. *Egy irányított $D = (V, A)$ gráfban akkor és csak akkor létezik olyan fenyves, amelynek élei minden irányított vágást lefognak, ha bármely nemüres $X \subset V$ halmazt elhagyva legfeljebb $|X|$ darab olyan komponens keletkezik, amelybe nem megy be él.*

A bizonyítás azon múlik, hogy a magokon értelmezett $\sigma(X)$ függvény ($D - X$ irányítatlan értelemben vett komponenseinek a száma) metsző szupermoduláris, így erre és a $g \equiv 1$ függvényre 7.4.2. alkalmazható.

Páros gráfok. A 7.4.2. tétel következő alkalmazása Rado 7.2.3. matroidos tételének és Lovász 7.4.1. tételének közös általánosítása.

7.4.4. tétel ([27]). *Legyen $G = (S, T; E)$ egyszerű páros gráf, $p : 2^S \to \mathbf{Z}_+$ pozitívan metsző szupermoduláris függvény, $g : S \to \mathbf{Z}_+$ pedig egy felső korlátként szolgáló függvény. Legyen továbbá $M = (T, r)$ egy r rangfüggvényű matroid a T alaphalmazon. Akkor és csak akkor létezik G éleinek olyan $F \subseteq E$ részhalmaza, amelyre*

$$r\big(\Gamma_F(X)\big) \geq p(X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re} \tag{7.27}$$

és

$$d_F(v) \leq g(v) \text{ minden } v \in S\text{-re,} \tag{7.28}$$

ha

$$p(X) \leq r\big(\Gamma_E(Y)\big) + g(X - Y) \text{ fennáll minden } Y \subseteq X \subseteq S \text{ halmazpárra.} \tag{7.29}$$

8. Szupermoduláris függvények fedése

8.1. Szupermoduláris függvényeket fedő irányítások

Meglepőnek tűnhet, de a vegyes gráfokról szóló egyszerű 3.1.2. kivételével a 3. fejezetben bemutatott valamennyi eredmény előírt tulajdonságú irányítások létezéséről egyetlen általános tételben foglalható össze.

Legyen h a V részhalmazain értelmezett halmazfüggvény, amelyet **igényfüggvény**nek nevezünk. Az alábbiakban az igényfüggvényekre automatikusan feltesszük, hogy $h(\emptyset) = h(V) = 0$. Azt mondjuk, hogy egy irányított gráf V-n **fedi** a h-t, ha $\varrho(X) \geq h(X)$ fennáll minden $X \subset V$-re. Absztrakt irányításon egy olyan irányítási feladatot értünk, amikor nem valami konkrét összefüggőség vagy fokszámkorlát elérése a cél, hanem adott h halmazfüggvényt akarunk fedni.

Valamennyi eddigi irányítási eredmény egy h igényfüggvényt fedő irányítás létezéséről szólt. Például, ha a gráf k-élösszefüggőségét kívántunk, akkor $h(X) = k$ ($\emptyset \subset X \subset V$), ha gyökeres k-él-összefüggőséget, akkor $h(X) = k$ ($\emptyset \subset X \subset V - s$)

és $h(X) = 0$ $(s \in X \subset V)$. A pontok befokára kirótt alsó korlát nyilván ilyen alakú, de a felső korlát is megfogalmazható eképp, mert egy v csúcs befokára kirótt $g(v)$ felső korlát ekvivalens a komplementer $V - v$ részhalmaz befokára tett $h(V - v) := d_G(v) - g(v)$ alsó korlát előírással. A bevezetőben már említettük, hogy ha h-ról semmit nem kötünk ki, úgy a h-t fedő irányítási feladat már $0-1$-értékű h esetén is NP-teljes problémákat foglal magában. Ebben a részben két függvényosztályt mutatunk be, melyekre kerek válasz adható.

8.1.1. Nem-negatív keresztező szupermoduláris függvények

Nevezzünk egy h halmazfüggvényt **keresztező** G-**szupermodulárisnak**, ha $h(X) + h(Y) \leq h(X \cup Y) + h(X \cap Y) + d(X, Y)$ teljesül a V minden X, Y keresztező részhalmazára, ahol $d(X, Y)$ jelöli azon G-beli élek számát, melyek $X - Y$ és $Y - X$ között vezetnek. A következő eredmény [21] bizonyítása a 3.2.1. tételre bemutatott bizonyítási megközelítés nagymérvű továbbfejlesztésén alapult.

8.1.1. tétel (Frank, 1980). *Tegyük fel, hogy h keresztező G-szupermoduláris és nemnegatív. G-nek akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, ha*

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum h(V_i), \tag{8.1}$$

és

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum h(V - V_i) \tag{8.2}$$

teljesül V minden $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára, ahol $e(\mathcal{P})$ jelöli a V_i részek között vezető élek számát.

A 8.1.1. tételnek egyfajta önerősítő jellege van, miután segítségével könnyen kiadódik a következő fokszám-korlátos kiterjesztése.

8.1.2. tétel. *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, h nemnegatív keresztező G-szupermoduláris függvény. Adott a ponthalmazon az $f : V \to \mathbf{Z}$ alsó és $g : V \to \mathbf{Z}$ felső korlát, melyekre $0 \leq f \leq g$. Akkor és csak akkor létezik G-nek olyan h-t fedő irányítása, amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra, ha*

$$i(V_0) + e(\mathcal{F}) \geq f(V_0) + \sum_{i=1}^{t} h(V_i) \tag{8.3}$$

és

$$e(\mathcal{F}) - d(V_0) \geq \sum_{i=1}^{t} h(V - V_i) - g(V_0) \tag{8.4}$$

fennáll a csúcsok minden olyan $\mathcal{F} = \{V_0, V_1, \ldots V_t\}$ partíciójára, amelyben egyedül a V_0 rész lehet üres.

Felhasználva, hogy a (8.3) feltételben g nem szerepel, míg a (8.4) feltételben f nem szerepel, a 8.1.2. tételből kiolvasható a lánctulajdonság:

8.1.3. tétel. *Legyen f és g a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf ponthalmazán egy alsó és egy felső korlát függvény ($0 \leq f \leq g$). Legyen h nemnegatív keresztező G-szupermoduláris függvény. Amennyiben létezik h-t fedő olyan irányítás, amelyben $\varrho'(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra, és létezik h-t fedő olyan irányítás, amelyben $\varrho''(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra, úgy létezik olyan h-t fedő irányítás is, amelyre $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra.* ■

A 8.1.1. tétel bizonyítás-technikáját alkalmazva levezethető az alábbi következmény, amely még k-élösszefüggő irányításokra is érdekes.

8.1.4. tétel. *Legyen G és h ugyanaz, mint a 8.1.1. tételben. Tegyük fel, hogy D_1 és D_2 mindegyike a G-nek egy h-t fedő irányítása. Ekkor el lehet jutni D_1-ből D_2-be irányított körök és utak egymást követő megfordításával úgy, hogy minden közbenső irányítás fedi h-t.* ■

8.1.2. Speciális esetek

Fontos speciális esetekben a 8.1.1. tételben a feltételek egyszerűsödnek.

8.1.5. következmény. (A) *Amennyiben a 8.1.1. tételben szereplő h függvény monoton csökkenő* (azaz $\emptyset \subset X \subset Y \subset V$ esetén $h(X) \geq h(Y)$), *akkor már a* (8.1) *feltétel elegendő.* (B) *Amennyiben a 8.1.1. tételben szereplő h függvény szimmetrikus* (azaz $\emptyset \subset X \subset V$ esetén $h(X) = h(V - X)$), *akkor elegendő a* (8.1) *feltételt csupán $t = 2$-re megkövetelni, ami tehát avval ekvivalens, hogy $d_G(X) \geq 2h(X)$ minden $X \subset V$ részhalmazra.*

A (B) részből $h(X) := k \quad (\emptyset \subset X \subset V)$ választással visszakapjuk Nash–Williams 3.4.2. irányítási tételét. Az (A) részből ennél általánosabb tétel nyerhető. Adott $l \leq k$ nemnegatív egész számok esetén egy $D = (V, E)$ irányított gráfot akkor nevezünk (k, l)-**élösszefüggő**nek, ha D-nek létezik egy olyan s gyökérpontja, hogy s-ből minden más pontba vezet k élidegen út és minden pontból vezet s-be l élidegen út. (Azt mondjuk, hogy D az s-re nézve (k, l)-élösszefüggő.) Menger irányított gráfokra vonatkozó tételének élidegen változata alapján ez azzal ekvivalens, hogy minden s-t nem tartalmazó halmaz befoka legalább k és minden s-t tartalmazó halmaz befoka legalább l. Figyeljük meg, hogy $k = l$ esetén a (k, l)-élösszefüggőség ekvivalens a k-élösszefüggőséggel.

Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot akkor nevezünk (k, l)-**partíció-összefüggő**nek, ha V bármely t-részes partíciójára ($t \geq 2$) a köztes élek száma legalább $k(t - 1) + l$. Nem nehéz igazolni, hogy $l \geq k$ esetén G akkor és csak akkor (k, l)-partíció-összefüggő, ha $(k + l)$-élösszefüggő. A $(k, 0)$-partíció-összefüggőség Tutte 4.2.8. tétele szerint k élidegen feszítő fa létezésével ekvivalens. A 8.1.5 következményből rögtön kiolvasható az alábbi jellemzés.

8.1.6. tétel. *Tegyük fel, hogy $0 \leq l \leq k$. Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik (k, l)-élösszefüggő irányítása, ha G (k, l)-partíció-összefüggő.*

A h igényfüggvény alkalmas megválasztásával nyerjük az alábbiakat.

8.1.7. tétel. *Legyen $f : V \to \mathbf{Z}_+$. A $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak akkor létezik olyan k-élösszefüggő irányítása, amelyben minden v csúcs befoka legalább $f(v)$, ha V minden olyan $\mathcal{P} := \{U_0, U_1, \ldots, U_q\}$ partíciójára ($q \geq 0$), amelyben egyedül az U_0 rész lehet üres* (és lehet $q = 0$, amikor is U_0 az egész V), *a köztes élek $e(\mathcal{P})$ számára és az U_0 által feszített élek $i(U_0)$ számára fennáll, hogy*

$$e(\mathcal{P}) + i(U_0) \geq f(U_0) + kq, \tag{8.5}$$

ahol $f(X) := \sum \left[f(v) : v \in X\right]$.

Analóg eredmény írható fel, ha a befokokra alsó helyett felső korlátokat adunk, és érvényben van a láncszabály is. A $k = 1$ esetben a feltételek egyszerűsödnek és visszajutunk a 3.2.1. tételhez.

8.1.3. Metsző szupermoduláris függvények

A 8.1.1. tétel érvényét veszti, ha h nemnegativitását nem kötjük ki. Érvényes viszont a következő [19].

8.1.8. tétel (Frank, 1978). *Legyen $h : 2^V \to \mathbf{Z}$ metsző szupermoduláris függvény. Akkor és csak akkor létezik G-nek h-t fedő irányítása, ha V minden $\{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára a keresztélek száma legalább $\sum_i h(V_i)$.*

E tétel speciális eseteként kiadódik az irányítatlan gráfok gyökeresen k-élösszefüggővé irányíthatóságáról szóló 3.4.4. tétel kiterjesztése vegyes gráfokra.

8.1.9. következmény. *Legyen $M = (V, A + E)$ a $G = (V, E)$ irányítatlan és a $D = (V, A)$ irányított gráfból összetett vegyes gráfnak s egy kijelölt gyökérpontja. M-nek akkor és csak akkor létezik gyökeresen k-élösszefüggő irányítása, ha $V - s$ minden $\mathcal{F} := \{V_1, \ldots, V_t\}$ részpartíciójára $e(\mathcal{F}) \geq \sum_i \left[k - \varrho_D(V_i)\right]$.*

Bár az irányítatlan gráfokra vonatkozó 3.4.4. tételben és 8.1.9. következményben szereplő feltételek ugyanolyan alakúak, van egy lényeges különbség. A 3.4.5. tétel szerint irányítatlan gráf gyökeres k-élössszefüggőre irányításánál érvényben van a láncszabály. Ugyanakkor példával megmutatható, hogy vegyes gráfokra ez már nem áll.

Látjuk tehát, hogy mikor létezik egy nemnegatív, keresztező szupermoduláris függvényt fedő irányítás és mikor egy metsző szupermoduláris függvényt fedő. Továbbra is megmarad azonban kérdés, hogy mi egy keresztező szupermoduláris függvényt fedő irányítás feltétele. Speciálisan, mikor van egy vegyes gráfnak k-élösszefüggő irányítása. A választ a szubmoduláris áramokról szóló 10.2. szakasz tartalmazza majd.

8.2. Keresztező szupermoduláris függvények fedése digráffal

Amint korábban láttuk, összefüggőségekre vonatkozó irányítási problémák hátterében gyakran szupermoduláris függvények szerepeltek. A megismert növelési feladatoknál is hasonló a helyzet.

8.2.1. Fedés irányított gráffal

Foglalkozzunk először irányított gráfokkal és vizsgáljuk meg, hogy Mader 2.1.6. leemelési tétele miként fogalmazható meg absztrakt alakban. Egyszerű megfontolással látható, hogy a Mader-tétel ekvivalens az alábbi fokszám-előírt élösszefüggőség növelési tétellel.

8.2.1. tétel. *Adott $D = (U, E)$ digráf és $m_{\mathrm{be}} : U \to \mathbf{Z}_+$, $m_{\mathrm{ki}} : U \to \mathbf{Z}_+$ fokszám-előírások. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (U, F)$ digráf, amelyre $\varrho_H(v) = m_{\mathrm{be}}(v)$ és $\delta_H(v) = m_{\mathrm{ki}}(v)$ teljesül minden $v \in U$ pontra és $D + H$ k-élösszefüggő, ha $m_{\mathrm{be}}(U) = m_{\mathrm{ki}}(U)$,*

$$m_{\mathrm{be}}(X) \geq k - \varrho_D(X) \tag{8.6}$$

és

$$m_{\mathrm{ki}}(X) \geq k - \delta_D(X) \tag{8.7}$$

teljesül minden $\emptyset \neq X \subset U$ részhalmazra.

Legyen p nemnegatív egészértékű halmazfüggvény a V alaphalmazon, amelyre $p(\emptyset) = p(V) = 0$. Azt mondjuk, hogy p pozitívan keresztező szupermoduláris, ha teljesíti a szupermodularitási egyenlőtlenséget (azaz $p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y)$) minden olyan keresztező X, Y halmazpárra, melyekre $p(X) > 0$, $p(Y) > 0$. Azt mondjuk, hogy egy digráf fedi p-t, ha minden X halmaz befoka legalább $p(X)$. A következő eredmény [30] úgy tekinthető, mint a Mader-féle irányított leemeléssel ekvivalens 8.2.1. tétel absztrakt kiterjesztése.

8.2.2. tétel (Frank, 1994). *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény V részhalmazain. Legyen $m_{\mathrm{ki}} : V \to \mathbf{Z}_+$ és $m_{\mathrm{be}} : V \to \mathbf{Z}_+$ a pontok ki- és befokaira vonatkozó előírás, melyekre $\gamma := m_{\mathrm{be}}(V) = m_{\mathrm{ki}}(V)$. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ irányított gráf, amely fedi p-t és amelyben*

$$\delta_H(v) = m_{\mathrm{ki}}(v) \quad \text{és} \quad \varrho_H(v) = m_{\mathrm{be}}(v) \tag{8.8}$$

minden csúcsra fennáll, ha minden $X \subseteq V$-re

$$p(V - X) \leq m_{\mathrm{ki}}(X) \quad \text{és} \quad p(X) \leq m_{\mathrm{be}}(X) \tag{8.9}$$

fennáll.

Érdekes, hogy ha csak a kifok-vektorra (vagy csak a befok-vektorra) van előírás, akkor már részpartíciós típusú feltételre is szükség van.

8.2.3. tétel. *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris függvény. Adott $m_{\mathrm{ki}} : V \to \mathbf{Z}_+$ vektor akkor és csak akkor p-t fedő kifok-vektor, ha*

$$m_{\mathrm{ki}}(Z) \geq p(V - Z) \text{ minden } Z \subset V\text{-re} \tag{8.10}$$

és

$$(8.11)\qquad m_{\rm ki}(V) \geq \max\Big\{\sum_i [p(X_i)] \,:\, \{X_i\} \text{ partíció}\Big\}.$$

Adott $m_{\rm be} : V \to \mathbf{Z}_+$ *vektor akkor és csak akkor* p*-t fedő befok-vektor, ha*

$$(8.12)\qquad m_{\rm be}(Z) \geq p(Z) \quad \text{minden } Z \subset V\text{-re}$$

és

$$(8.13)\qquad m_{\rm be}(V) \geq \max\Big\{\sum_i [p(V - X_i)] \,:\, \{X_i\} \text{ partíció}\Big\}.$$

Az 5.4.3. irányított növelési tétel absztrakt megfelelője a következő.

8.2.4. tétel ([30]). *Legyen* p *pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény* V *részhalmazain. Adott* γ *egészre akkor és csak akkor létezik egy legfeljebb* γ *élű* p*-t fedő* H *digráf, ha* V *minden* $\{V_1, \ldots, V_t\}$ *partíciójára*

$$(8.14)\qquad \sum_{i=1}^{t} p(V_i) \leq \gamma$$

és

$$(8.15)\qquad \sum_{i=1}^{t} p(V - V_i) \leq \gamma.$$

H választható hurokmentesnek.

8.2.5. tétel. *Legyen* p *pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény* V *részhalmazain és* $g_{\rm be} : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$*, illetve* $g_{\rm ki} : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ *a pontok befokaira, illetve kifokaira vonatkozó felső korlátok. Akkor és csak akkor létezik* p*-t fedő* $H = (V, F)$ *irányított gráf, amelyben minden* v *csúcsra*

$$(8.16)\qquad \varrho_H(v) \leq g_{\rm be}(v) \text{ és } \delta_H(v) \leq g_{\rm ki}(v)$$

ha minden $X \subseteq V$*-re*

$$(8.17)\qquad p(X) \leq g_{\rm be}(X),$$

és

$$(8.18)\qquad p(V - X) \leq g_{\rm ki}(X),$$

továbbá V *minden* $\{V_1, \ldots, V_t\}$ *partíciójára*

$$(8.19)\qquad \sum_i p(V - V_i) \leq g_{\rm be}(V),$$

és

$$(8.20) \qquad \sum_i p(V_i) \le g_{\mathrm{ki}}(V).$$

Amennyiben $g_{\mathrm{be}}(V) \le g_{\mathrm{ki}}(V)$, úgy (8.17) implikálja (8.20)-t, azaz ilyenkor már a (8.17), (8.18) és (8.19) feltételek elegendőek p-t fedő és (8.16)-t teljesítő digráf létezéséhez. Ha ráadásul $g_{\mathrm{be}}(V) = g_{\mathrm{ki}}(V)$, úgy már a (8.17) és (8.18) feltételek is elegendőek.

Most is érvényes a lánctulajdonság.

8.2.6. tétel. *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény V részhalmazain és $g_{\mathrm{be}} : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$, illetve $g_{\mathrm{ki}} : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ a pontok befokaira, illetve kifokaira vonatkozó felső korlátok. Akkor és csak akkor létezik p-t fedő $H = (V, F)$ irányított gráf,*

(i) *amelyben minden v csúcsra $\varrho_H(v) \le g_{\mathrm{be}}(v)$, ha (8.17) és (8.19) teljesül,*

(ii) *amelyben minden v csúcsra $\delta_H(v) \le g_{\mathrm{ki}}(v)$, ha (8.18) és (8.20) teljesül.*

(iii) *Ha külön-külön létezik (i)-t teljesítő és (ii)-t teljesítő digráf is, akkor létezik olyan is, amely mindkettőt teljesíti.*

ST-keresztezés. A 8.2.4. tétel tovább általáanosítható. Legyen a V alaphalmaznak S és T két nemüres (nem feltételenül diszjunkt) részhalmaza V. Egy élre azt mondjuk, hogy **ST-él,** ha a töve S-ben a feje pedig T-ben van. Az X és Y részhalmaz **ST-keresztező,** ha az $X \cap Y \cap T$, $S - (X \cap Y)$, $X - Y$, $Y - X$ halmazok egyike sem üres. Amennyiben $S = T = V$, úgy ez egybeesik a keresztezés megszokott fogalmával. V részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ családja **ST-keresztező,** ha bármely két ST-keresztező tagjára azok metszete és uniója is $\mathcal{F}$-ben van. Halmazok egy $\mathcal{I}$ családja **ST-független,** ha bármely két X, Y tagjára az $X \cap Y \cap T$ és $S - (X \cup Y)$ halmazok közül legalább az egyik üres. Ez azzal ekvivalens, hogy nem létezik ST-él, amely mind X-be, mind Y-ba belép.

Egy $p : 2^V \to \mathbf{Z}_+$ halmazfüggvény **pozitívan ST-keresztező szupermoduláris,** ha bármely két ST-keresztező halmazra, melyek p-értéke pozitív, teljesül a szupermodularitási egyenlőtlenség.

8.2.7. tétel (Frank és Jordán, 1995). *Tegyük fel, hogy egy pozitívan ST-keresztező szupermoduláris p halmazfüggvény csak olyan X halmazokon pozitív, melyekre $T \cap X \ne \emptyset$, $S - X \ne \emptyset$. Ekkor a p-t fedő irányított ST-élek minimális száma egyenlő az ST-független halmazok maximális p-összegével.*

Az $S = T = V$ speciális esetben könnyen megfigyelhető, hogy halmazok egy ST-független rendszere vagy páronként diszjunkt vagy páronként ko-diszjunkt halmazokból áll, így ilyenkor visszajutunk a 8.2.4. tételhez. Lényeges különbség azonban, hogy szemben a 8.2.4. tétellel, a 8.2.7. tétel bizonyítása a kikeresztezési technikán alapul és nem ismeretes egyszerű algoritmus a keresett fedés megtalálására.

8.2.2. A leemelési tételek kiterjesztései

A fenti eredményekből Mader leemelési tételénél általánosabb is kiolvasható. Egy digráfot akkor neveztünk (k,l)-**élösszefüggő**nek ($l \leq k$), ha létezik egy s csúcsa úgy, hogy minden s-t nem tartalmazó halmaz befoka legalább k és minden s-t tartalmazó halmaz befoka legalább l. Ez azzal ekvivalens, hogy s-ből minden csúcsba vezet k élidegen út, és minden csúcsból vezet s-be l élidegen út.

8.2.8. tétel. *Legyen a $D = (U + z, A)$ digráfnak $s \in U$ olyan gyökérpontja, amelyre nézve D a z-től eltekintve (k,l)-élösszefüggő* (azaz s-ből minden U-beli u csúcsba vezet k és u-ból vezet s-be l élidegen út). *Tegyük fel, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$. Ekkor a z-be bemenő és z-ből kilépő élek párba állíthatók úgy, hogy e párokat egyszerre leemelve (k,l)-élösszefüggő digráfot kapunk az U csúcshalmazon.*

Mader tételének egy másirányú kiterjesztése is kiadódik speciális esetként.

8.2.9. tétel. *Legyen a $D = (U + z, A)$ digráfban $\varrho(z) = \delta(z)$. Legyen $U' \subseteq U$ olyan halmaz, amely tartalmazza az összes z-vel szomszédos pontot* (azaz $S \subseteq U'$). *Tegyük fel, hogy D az U'-ben k-élösszefüggő* ($k \geq 1$). *Ekkor minden $e = zt$ élhez létezik olyan $f = uz$ él, amelyre az $\{e, f\}$ élpár leemelésével kapott D^{ef} digráf is U'-ben k-élösszefüggő.*

8.3. Fedések irányítatlan gráffal és hipergráffal

Watanabe és Nakamura 5.2.3. tételét irányítatlan gráfok élösszefüggőségének növeléséről J. Bang-Jensen és B. Jackson [1] terjesztette ki hipergráfok élösszefüggőségének gráfélekkel való növelésére. Ennek rögtön az absztrakt alakját fogalmazzuk meg [3]. Legyen p egészértékű, szimmetrikus (azaz $p(X) = p(V - X)$) halmazfüggvény a V alaphalmazon. Azt mondjuk, hogy egy G irányítatlan gráf fedi p-t, ha $d_G(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$ részhalmazra. Kérdés, hogy mikor lehet p-t adott γ számú éllel fedni. Tetszőleges $\{V_1, \ldots, V_t\}$ részpartícióra a $\sum_p(V_i) \leq 2\gamma$ feltétel szükséges és a Watanabe-Nakamura tétel azt mondta ki, hogy $p \equiv k$ esetén elegendő is, ha $k \geq 2$. A legegyszerűbb $p \equiv 1$ esetben azonban a részpartíciós feltétel nem elegendő, ezért γ-ra további alsó korlátra van szükségünk. A V alaphalmaz egy $\{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára azt mondjuk, hogy p-teljes, ha bármely $1 \leq j \leq t-1$ darab V_i halmaz X egyesítésére $p(X) \geq 1$. Mivel egy p-t fedő gráf a V_i halmazok öszehúzásával biztosan összefüggő lesz, így p fedéséhez legalább $t-1$ él kell. Nevezzük a p dimenziójának a legnagyobb t értéket, amire van p-teljes t részes partíció.

8.3.1. tétel (Benczúr és Frank, 1999). *Legyen p egészértékű, szimmetrikus, keresztező szupermoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. Akkor és csak akkor fedhető p legfeljebb γ éllel, ha $\dim(p) - 1 \leq \gamma$ és $\sum_i p(V_i) \leq 2\gamma$ minden $\{V_1, \ldots, V_t\}$ részpartícióra teljesül.*

Ez a tétel nem csupán Bang-Jensen és Jackson tételét adja vissza speciális esetként, de annak a következő általánosítását is. Azt mondjuk, hogy egy X halmaz szeparálja a $T \subseteq V$ halmazt, ha mind $X - T$, mind $X \cap T$ nemüres, míg egy partíció szeparálja T-t, ha minden tagja szeparálja. A H hipergráf $T \subseteq V$ halmazon k-élösszefüggő, ha bármely T-t szeparáló X halmazra $d_H(X) \geq k$. Egy H' hipergráfra legyen $\sigma_T(X)$ az X elhagyásával keletkező komponensek közül a T-t szeparálók száma.

8.3.2. tétel ([3], 1999). *Egy $H = (V, \mathcal{A})$ hipergráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ gráfél hozzáadásával a T halmazon k-élösszefüggővé, ha V minden T-t szeparáló $\mathcal{P}$ részpartíciójára $\sum \big[k - d_H(X) : X \in \mathcal{P}\big]$, és ha $\sigma_T(H') - 1 \leq \gamma$ fennáll a H minden olyan részhipergráfjára, amely legfeljebb $k-1$ hiperél eltörlésével keletkezik.*

A fedési kérdést még tovább általánosíthatjuk, ha p fedésére nem csak gráféleket használhatunk, hanem nagyobb méretű hiperéleket is. Azt mondjuk, hogy egy H hipergráf fedi p-t, ha $d_H(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$-halmazra. A következő, Király Tamástól [44] származó tétel a 8.3.1. tétel jelentős mérvű általánosítása.

8.3.3. tétel (Király T., 2002). *Legyen p egészértékű, szimmetrikus, keresztező szupermoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon és legyen $u \geq 2$ egész. Akkor és csak akkor létezik egy p-t fedő legfeljebb γ hiperélből álló u-uniform hipergráf, ha*

$$u\gamma \geq \sum_i p(V_i) \text{ minden } \{V_1, \ldots, V_t\} \text{ részpartícióra,} \tag{8.21}$$

$$\gamma \geq p(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ részhalmazra,} \tag{8.22}$$

$$\gamma(u-1) \geq \dim(p) - 1. \tag{8.23}$$

Speciális esetként megadható annak a feltétele, hogy egy hipergráfot mikor lehet k-élösszefüggővé tenni legfeljebb γ darab u méretű hiperél hozzáadásával.

Szigeti Z. [57] azt a hipergráf fedési problémát oldotta meg, amikor nem az egyes hiperélek elemszámára van felső korlát előírva, hanem a hiperélek összméretére.

8.3.4. tétel (Szigeti, 1999). *Legyen p egészértékű, szimmetrikus, ferdén szupermoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon és legyen l egész. Akkor és csak akkor létezik egy p-t fedő hipergráf, melyben a hiperélek összmérete legfeljebb l, ha a csúcsok bármely részpartíciójára a benne szereplő halmazok p-összege legfeljebb lk.*

Legyen r a V halmaz pontpárjain értelmezett nemnegatív, egész, szimmetrikus igényfüggvény. Azt mondjuk, hogy egy hipergráf $\mathbf{r}$-élösszefüggő, ha a hipergráf minden u, v pontpárjára minden u-t és v-t elválasztó vágásban van legalább $r(u,v)$ hiperél. Speciális esetként kapjuk a következő növelési tételt.

8.3.5. tétel (Szigeti). *Adott $H = (V, \mathcal{E})$ hipergáf akkor és csak akkor tehető legfeljebb l összméretű hiperélek hozzáadásával $\mathbf{r}$-élösszefüggővé, ha $\sum_i \big[R_r(X_i) - d_H(X_i)\big] \leq l$ fennáll a V minden $\{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciójára, ahol $R(X) := \max\big\{r(u,v) : |X \cap \{u,v\}| = 1\big\}$.*

8.4. Szupermoduláris párhalmaz függvények fedése

Az irányított gráfok élösszefüggőségének minimális növeléséről szóló 5.4.3. tétel „absztrakt" alakja a 8.2.4. tétel keresztező szupermoduláris függvények minimális digráffal való fedéséről. Miképp lehetne a digráfok pontösszefüggésének minimális növelésére vonatkozó 5.4.5. tételt ilyen absztrakt alakra kiterjeszteni?

Legyen V adott alaphalmaz. Egy $X = (X_K, X_B)$ részhalmazokból álló párt, amelyre $X_B \subseteq X_K \subseteq V$ **párhalmaz**nak nevezzük. X_K a párhalmaz **külső**, míg X_B a **belső** tagja. Egy párhalmazt **triviális**nak mondunk, ha belső halmaza üres vagy külső halmaza a V alaphalmaz. Az olyan párhalmazokat, melyekre $X_K = X_B$ azonosíthatjuk a V részhalmazaival. Azt mondjuk, hogy egy $e = uv$ irányított él **fedi** vagy **lefogja** az X párhalmazt vagy hogy **belép** X-be, ha e belép X mindkét tagjába. Egy $D = (V, A)$ digráfban $\varrho(X) = \varrho_D(X)$ jelöli az X párhalmazba lépő élek számát.

Jelölje a párhalmazok halmazát $\mathcal{P}_2$. Ezen a természetes módon bevezethetünk egy részbenrendezést, amelyben $X \leq Y$, ha $X_B \subseteq Y_B$ és $X_K \subseteq Y_K$. Az X és Y párhalmazok metszete legyen $(X_K \cap Y_K, X_B \cap Y_B)$ uniója pedig $(X_K \cup Y_K, X_B \cup Y_B)$. Azt mondjuk, hogy az X és Y párhalmaz **keresztező**, ha nem összehasonlíthatók, továbbá $X_B \cap Y_B \neq \emptyset$ és $X_K \cup Y_K \neq V$. A párhalmazok egy $\mathcal{L}$ részhalmazáról azt mondjuk, hogy **keresztező**, ha $\mathcal{L}$ bármely két keresztező tagjával együtt azok metszete és uniója is $\mathcal{L}$-ben van. A $\mathcal{P}_2$ két tagját nevezzük **független**nek, ha a belső halmazaik diszjunktak vagy a külső halmazaik uniója V. Ami azzal ekvivalens, hogy nem fedhetők le egyetlen irányított éllel.

Legyen p nemnegatív, egészértékű, pozitívan keresztező szupermoduláris függvény $\mathcal{P}_2$-n, amelyről feltesszük, hogy minden triviális párhalmazon az értéke 0. Jelölje $D^* = (V, A^*)$ a teljes irányított gráfot (amelyben tehát minden uv él benne van, és így D^*-nek $m := |V|\big(|V| - 1\big)$ éle van). Azt mondjuk, hogy egy $z : A^* \to \mathbf{Z}_+$ egészértékű függgény **lefogja** vagy **fedi** p-t, ha $\varrho_z(X_K, X_B) \geq p(X_K, X_B)$, vagy röviden

$$\varrho_z(X) \geq p(X) \quad \text{fennáll minden } X = (X_K, X_B) \in \mathcal{P}_2 \text{ párra.}$$

Mivel p értéke triviális párhalmazokon 0 így p-nek mindig létezik lefogása.

A $\sum \big[p(X) : X \in \mathcal{F}\big]$ összegről azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}$ p-összege és röviden $p(\mathcal{F})$-fel jelöljük. Legyen τ_p a p minimális lefogásának értéke, azaz

$$\tau_p := \min \big\{z(A^*) : z \geq 0 \text{ egészértékű fedése } p\text{-nek}\big\},$$

és legyen ν_p a $\mathcal{P}_2$ egy független részhalmazának maximális p-összege, azaz

$$\nu_p := \max \big\{p(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}_2,\ \mathcal{F} \text{ független}\big\}.$$

8.4.1. tétel (Frank és Jordán, 1995). *Legyen $D = (V, A^*)$ a teljes irányított gráf, p pozitívan keresztező szupermoduláris függvény a párhalmazok $\mathcal{P}_2$ halmazán, amely minden triviális párhalmazon 0 értékű. Ekkor $\tau_p = \nu_p$.*

Ez a tétel egyrészt magában foglalja a keresztező szupermoduláris függvények fedéséről szóló 8.2.4. tételt, másrészt a pontösszefüggés növelésére vonatkozó 5.4.5. tételt is. Érdemes külön megfogalmazni a következő speciális esetét.

8.4.2. tétel ([32]). *Legyen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_2$ nemtriviális párhalmazok egy keresztező rendszere. Az $\mathcal{L}$-t lefogó élek minimális $\tau = \tau(\mathcal{L})$ száma egyenlő az $\mathcal{L}$-ből függetlenül kiválasztható párhalmazok maximális $\nu = \nu(\mathcal{L})$ számával.*

8.4.1. Alakzatok minimális fedése téglalapokkal: Győri tétele

A [32] dolgozatban megmutattuk, hogy a 8.4.2. tétel egy ekvivalens megfogalmazásából könnyen levezethető Győri Ervin egy mély tétele, sőt annak egy kiterjesztése. Legyen $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$ egyszerű irányított út, ahol az e_i irányított él töve v_{i-1} és feje v_i. Jelöljük a P csúcsainak halmazát V-vel. Legyen $\mathcal{U} := \{U_1, \ldots, U_k\}$ a P részútjainak egy rendszere. A következőkben úton általában az út élhalmazát értjük.

Azt mondjuk, hogy P részútjainak egy $\mathcal{B}$ rendszere **generálja** $\mathcal{U}$-t vagy hogy $\mathcal{B}$ **generátora** $\mathcal{U}$-nak, ha $\mathcal{U}$ minden tagja előáll néhány $\mathcal{B}$-beli út egyesítéseként. Például $\mathcal{U}$ saját magának generátora, és az egyelemű utakból álló $\{e_1, \ldots, e_n\}$ rendszer is generálja $\mathcal{U}$-t. Jelölje $\gamma(\mathcal{U})$ az $\mathcal{U}$ generátorainak minimális elemszámát.

Azt mondjuk, hogy egy U útból és annak egy e éléből álló (U, e) pár **reprezentált utat** alkot. Jelölje $(U, e)^-$ az U azon pontjainak halmazát, melyek megelőzik e-t, míg $(U, e)^+$ azokét, melyek követik. ($(U, e)^-$ és $(U, e)^+$ tehát partícionálja az U ponthalmazát.) Azt mondjuk, hogy a $\big((U, e)^-, (U, e)^+\big)$ halmazpár az (U, e) reprezentált úthoz tartozik. Jelölje $\mathcal{U}_r$ az olyan (U, e) reprezentált utak halmazát, amelyekre $U \in \mathcal{U}$.

Legyen $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_t\}$ a P részútjainak egy családja és legyen $\mathcal{R} := \{f_1, f_2, \ldots, f_t\}$ egy reprezentáló rendszer, azaz az f_i irányított élek különböző elemei P-nek és $f_i \in I_i$ minden $i = 1, \ldots, t$-re. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{R}$ **erős reprezentáló rendszer,** ha $I_i \cap I_j$ nem tartalmazza f_i és f_j mindegyikét (i, j, $1 \leq i < j \leq t$). Ebben az esetben a reprezentált utak $\big\{(I_1, f_1), (I_2, f_2), \ldots, (I_t, f_t)\big\}$ családját **függetlennek** nevezzük. Az $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_t\}$ **erősen reprezentálható,** ha létezik erős reprezentáns rendszere.

Jelölje $\mu(\mathcal{U})$ az $\mathcal{U}$-ban lévő lévő erősen reprezentálható utak maximális számát. Könnyen látható, hogy ha $\mathcal{R}$ erősen reprezentálható útrendszer, akkor $\mathcal{R}$-t nem lehet $|\mathcal{R}|$-nél kevesebb úttal generálni. Ebből következik, hogy $\mu(\mathcal{U}) \leq \gamma(\mathcal{U})$. Győri Ervin [39]. tétele azt állítja, hogy itt valójában egyenlőség szerepel:

8.4.3. tétel (Győri, 1984). *A P út részútjainak bármely $\mathcal{U}$ családjára fennáll $\mu(\mathcal{U}) = \gamma(\mathcal{U})$.*

Valójában a 8.4.2. tételből Győri tételének az a kiterjesztése is kiadódik, amelyben a P irányított út helyett egy irányított kör adott részútrendszerét akarjuk generálni.

Győri fenti tételéből egy érdekes kombinatorikus geometriai eredmény következik. Legyen T egy derékszögű poligon, azaz T a síknak vízszintes és függőleges szakaszokkal határolt (összefüggő, zárt) tartománya. T-t le akarjuk fedni T-be eső (zárt) téglalapokkal. Az alábbiakban téglalapon mindig olyan téglalapot értünk, melyek oldalai vízszintesek vagy függőlegesek. A szükséges téglalapok száma nyilván legalább akkora, mint T páronként „független" pontjainak maximális száma, ahol két pontot akkor nevezünk függetlennek, ha nem fedhetők le T-hez tartozó téglalappal (azaz a két pont által meghatározott legszűkebb téglalap kilóg T-ből). Létezik olyan példa, ahol ezen maximumnál több téglalapra van szükség a fedéshez. Ennek fényében értékes, hogy függőlegesen konvex alakzatokra ilyen ellenpélda már nem létezik, magyarán a min-max tétel ilyenkor már fennáll. A T tartományt akkor nevezzük **függőlegesen konvexnek,** ha T-nek és bármely függőleges egyenesnek a metszete szakasz.

8.4.4. tétel (Győri, 1984). *Legyen T függőlegesen konvex derékszögű poligon. A T-t fedő téglalapok minimális száma egyenlő T páronként független pontjainak maximális számával.*

Ez a tétel is kiterjeszthető egy olyan általánosabb esetre, amikor a függőlegesen konvex alakzat egy álló henger palástján adott.

9. Poliéderes kombinatorika

A kombinatorikus optimalizálásban fontos szerepet tölt be a lineáris programozás és különösen az egészértékű optimumoknak van kombinatorikus tartalma. Poliéderen egy lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazát értjük, míg egy politop véges sok pont konvex burka. A poliéder mindig felírható $\{x : Qx \leq b\}$ alakban, de könnyen láthatóan a formailag általánosabb alakú $\{x = (x_0, x_1) : Px_0 + Ax_1 = b_0, Qx_0 + Bx_1 \leq b_1, x_1 \geq 0\}$ halmaz is poliéder.

Egy $R = \{x : Qx \leq b\}$ (nemüres) poliéder F **oldal**án (face) az R-nek egy

$$F := \{x \in R : cx = \delta\} \tag{9.1}$$

alakú nemüres részhalmazát értjük, ahol $\delta := \max\{cx : x \in R\}$ valamely cx célfüggvényre, melyre a maximum létezik. Vagyis a poliéder oldala az optimum helyek halmaza valamely cx lineáris célfüggvényre nézve. Egy egyelemű oldal neve csúcs. Kimutatható, hogy R pontosan akkor csúcsos, ha egyenes-mentes, ami viszont azzal ekvivalens, hogy Q oszlopai lineárisan függetlenek.

9.0.1. tétel. *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy nemüres F részhalmaza akkor és csak akkor oldala R-nek, ha létezik a Q bizonyos soraiból álló olyan Q' részmátrix, amelyre $F = \{x \in R : Q'x = b'\}$, ahol b' a Q' sorainak megfelelő részvektora b-nek.*

9.0.2. tétel. *Egy R nemüres poliédernek akkor és csak akkor nincs valódi oldala, ha R affin altér. Egy poliéder tartalmazásra nézve minimális oldala affin altér.*

Egy poliédert akkor nevezünk egésznek, ha minden oldala tartalmaz egész pontot (rácspontot). Ez avval ekvivalens, hogy minden minimális oldal tartalmaz egész pontot, ami csúcsos (vagy ekvivalensen egyenes-mentes) poliéder esetén azzal egyenértékű, hogy minden csúcs egész.

9.1. Teljesen unimoduláris mátrixok

Az alábbiakban egy mátrixot vagy egy vektort akkor nevezünk egésznek vagy egészértékűnek, ha minden elemük (komponensük) egész szám. Valamely Q mátrixot akkor nevezünk **teljesen unimodulárisnak** (TU: totally unimodular), ha minden aldeterminánsa $(0, \pm 1)$ értékű. Speciálisan, ilyen mátrix minden eleme $0, +1$ vagy -1. Világos, hogy TU-mátrix transzponáltja is az. Sorokat vagy oszlopokat -1-gyel szorozva vagy elhagyva ismét TU-mátrixot kapunk. Továbbá, egységvektorokat sorként vagy oszlopként egy TU-mátrixhoz illesztve TU-mátrixot kapunk. Így, ha a Q TU-mátrixot kiegészítjük egy I egység-mátrixszal, akkor a keletkező (Q, I) mátrix is TU-mátrix. Ha Q TU-mátrix, úgy $(Q, -Q)$ is az. (De ha mondjuk egy csupa 1 oszloppal egészítjük ki Q-t, akkor nem feltétlenül kapunk TU-mátrixot: legyen Q az $\{1, 2, 3, 4\}$ pontokon az $\{12, 13, 14\}$ élekből álló gráf 4×3-as incidencia mátrixa.)

Példaképp, legyen Q egy $D = (V, A)$ irányított gráf incidencia mátrixa, azaz Q sorai a V-nek, oszlopai E-nek felelnek meg, és az $q_{v,e}$ elem akkor $+1$, illetve -1, ha az e él belép, illetve kilép v-ből (egyébként 0). Egy $G = (V, E)$ gráf (pont-él) incidencia mátrixában a soroknak a csúcsok, míg az oszlopoknak az élek felelnek meg. A mátrix egy v csúcshoz és e élhez tartozó eleme akkor 1, ha e egyik végpontja v, különben 0. Tehát az incidencia mátrix minden oszlopában két darab 1-es elem van.

9.1.1. tétel. (a) *Digráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.* (b) *Páros gráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.*

A digráf incidencia mátrixát általánosítja a **hálózati mátrix.** Legyen D olyan irányított gráf, amely irányítatlan értelemben összefüggő és legyen F egy feszítő fája. A H_F mátrix sorai az F éleinek felelnek meg, míg az oszlopai az F-en kívüli éleknek. Minden uv nem-fa élre a fában egy egyértelmű *(nem feltétlenül irányított)* út vezet v-ből u-ba. Ennek egy f elemére a mátrix $a_{f,e}$ elemét definiáljuk 1-nek, ha f iránya megegyezik az útéval és -1-nek, ha azzal ellentétes. A mátrix minden más eleme 0.

9.1.2. tétel. *A H_F hálózati mátrix teljesen unimoduláris.*

9.1.3. következmény. *Egy olyan hipergráf, amely egy irányított fa élhalmazán van definiálva és a hiperélek irányított utak, teljesen unimoduláris.* ■

9.1.1. Farkas lemma és dualitás tétel TU-mátrixokra

Tekintsük az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix által meghatározott primál

$$Px = b_0, \quad Qx \leq b_1 \tag{9.2}$$

rendszert valamint a $y = (y_0, y_1)$ duál-változóra felírt duális

$$y_1 \geq 0, \quad y_0 P + y_1 Q = 0, \quad y_0 b_0 + y_1 b_1 < 0 \tag{9.3}$$

rendszert. A Farkas lemma egyik változata szerint az (9.2) és az (9.3) rendszerek közül pontosan az egyik oldható meg. Az alábbi tétel a Farkas lemma TU-mátrixokra vonatkozó élesítését szolgáltatja.

9.1.4. tétel. *Tegyük fel, hogy az* $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ *mátrix teljesen unimoduláris. Ha a* (9.2) *primál probléma oldható meg és a korlátozó* b *vektor egész, akkor* (9.2)*-nek van egész megoldása is. Ha a* (9.3) *duális probléma oldható meg, akkor van* $(0, \pm 1)$*-értékű* y *megoldás is* (függetlenül b egészértékűségétől).

9.1.5. tétel. *Ismét legyen az* $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ *mátrix teljesen unimoduláris és* b *egész vektor. Ha a* $\max\{cx : Px = b_0,\ Qx \leq b_1\}$ *lineáris programozási problémának létezik megoldása, akkor az optimum egész vektoron is felvétetik* (függetlenül attól, hogy c egészértékű vagy sem). Ekvivalens alakban: *minden TU-mátrix és egész korlátozó vektor által megadott poliéder egész.*

9.1.2. TU-mátrixok jellemzése

Felvetődik, hogy léteznek-e teljesen unimodulárisnál általánosabb mátrixok, melyekre az általuk meghatározott poliéder minden egész korlátozó vektor esetén egész. Hoffman és Kruskal [40] alábbi tétele szerint a válasz egyfajta értelemben nemleges.

9.1.6. tétel (Hoffman és Kruskal, 1956). *A* Q *egész mátrix akkor és csak akkor teljesen unimoduláris, ha minden egész* b *vektorra az* $R_b := \{x : x \geq 0,\ Qx \leq b\}$ *poliéder egész.*

Nem érvényes viszont az a természetesnek tűnő állítás, miszerint *egy négyzetes egész* Q *mátrix akkor és csak akkor TU, ha minden* b *egész vektorra a* $Qx = b$ *egyértelmű megoldása egész.* Ellenpélda az a 3×3-as mátrix, amelynek sorai $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$.

A teljesen unimoduláris mátrixok egy érdekes alkalmazása egyenletes színezésekkel foglalkozik. Az A mátrix oszlopainak egy partícióját („színezését") $A_1, A_2, \ldots, A_k$ részre akkor nevezzük **egyenletes**nek, ha A minden a sorára érvényes, hogy a sornak az egyes A_i részekbe eső elemeinek összege minden A_i-re lényegében ugyanaz, tehát $\lfloor e_n a/k \rfloor$ vagy $\lceil e_n a/k \rceil$.

9.1.7. tétel. *Az* A *TU-mátrix oszlopainak létezik egyenletes* k*-színezése.*

Az egyenletes színezhetőség valójában jellemzi is a TU-mátrixokat.

9.1.8. tétel (Ghouila-Houri) (ejtsd: Gujla-úri). *Egy Q $(0, \pm 1)$-értékű rt k mátrix akkor és csak akkor teljesen unimoduláris, ha oszlapainak bármely részhalmaza egyenletesen 2-színezhető.*

9.2. Alkalmazások páros és irányított gráfokra

A páros gráfok maximális párosításaira valamint az irányított gráfokban tekintett útakra folyamokra áramokra vonatkozó tételek hátterében a teljes unimodularitás áll. A csupa egyesből álló j-dimenziós vektort e_j jelöli, míg a $j \cdot j$-es identitás mátrixot I_j.

9.2.1. Páros gráfok

Optimális részgráfok. Először levezetjük Kőnig tételét:

9.2.1. tétel (Kőnig, 1931). *A $G = (S, T; E)$ páros gráfban a független élek maximális ν száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális τ számával.*

Bizonyítás. A gráf pontjainak számát jelölje p az élek számát q. A páros gráf incidencia mátrixát jelölje A, amelyben a soroknak a gráf pontjai, az oszlopoknak a gráf élei felelnek meg. Ekkor tehát A egy $p \times q$ méretű $0-1$-mátrix. Tekintsük a következő primál-duál lineáris program párt:

$$\max\{e_q x : Ax \leq e_p,\ x \geq 0\}, \tag{9.4}$$

$$\min\{e_p y : yA \geq e_q,\ y \geq 0\}. \tag{9.5}$$

A 9.1.5. tétel szerint mindkét programnak az optimuma egész vektoron felvétetik. Jelöljük ezeket rendre x_0-lal és y_0-lal. (9.4) minden egészértékű megoldása $0-1$ értékű, és rögtön látszik, hogy (9.5) minden optimális egészértékű megoldása is $0-1$ értékű. Legyen M azon élek halmaza, melyeken x_0 az 1 értéket vesz fel, és legyen L azon pontok halmaza, amelyeken y_0 egyet vesz fel. Az $Ax \leq e_p$ feltétel azt jelenti, hogy M párosítás a gráfban, míg az $yA \geq e_q$ feltétel azt jelenti, hogy L az éleket lefogó pontrendszer. A primál és duál optimum értékek egyenlősége pedig azt jelenti, hogy $|M| = |L|$, ami a célunk volt. ■

Természetesen a primál programban az azonosan 1 célfüggvény helyett választhatunk tetszőleges c célfüggvényt. Ekkor a fenti megközelítés Egerváry tételének következő változatát adja.

9.2.2. tétel. *Páros gráfban egy párosítás maximális súlya egyenlő a*

$$\min\left\{\sum_{v \in V} \pi(v) : \pi \geq 0,\ \pi(u) + \pi(v) \geq c(uv) \text{ minden } uv \text{ élre}\right\}$$

értékkel. Ha c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.

Hasonlóképp kaphatjuk meg Egerváry tételét, sőt most már belefoglaljuk azt az esetet is, amikor a súlyfüggvény nem egész.

9.2.3. tétel (Egerváry, 1931). *A $G = (S, T; E)$ teljes párosítással rendelkező páros gráfban a $c \geq 0$ súlyfüggvényre vonatkozó maximális súlyú teljes párosítás ν_c súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális τ_c összértékével. Amennyiben G teljes páros gráf, úgy az optimális súlyozott lefogás választható nemnegatívnak is. Amennyiben c egészértékű az optimális súlyozott lefogás is választható annak.*

Mi történik, ha adott k-ra a pontosan k élű párosítások maximális súlyára szeretnénk tételt kapni? Miután egy páros gráf incidenciamátrixát egy csupa egyes sorral kiegészítve továbbra is TU-mátrixot kapunk (figyelem: csupa egyes oszloppal való kiegészítéssel nem), így a következő primál-duál lineáris program pár megadja a választ: $\max\{cx : Ax \leq e_p,\ e_q x = k\}$ és $\min\{\pi e_p + k\alpha : \pi A + \alpha e_q \geq c,\ \pi \geq 0\}$. A primál optimum tehát egészértékű, és így szükségképpen egy k elemű párosítás incidencia vektora. A duál optimum is egészértékű, feltéve, hogy c az.

Élszínezések. Közismert Kőnig élszínezési tétele, amely szerint minden Δ-reguláris páros gráf élhalmaza felbomlik Δ élidegen teljes párosításra. (Ez közvetlenül levezethető indukcióval, vagy esetleg a Hall-tételre támaszkodva). Ugyanakkor a TU-mátrixokra vonatkozó 9.1.7 egyenletes színezési tételből sokkal általánosabb eredmény nyerhető. Az élszínezési tételt néha kicsit általánosabban fogalmazzák meg: *Ha egy páros gráfban a maximális fokszám Δ, akkor az éleket meg lehet Δ színnel színezni úgy, hogy minden csúcsba különböző színű élek futnak.*

9.2.4. tétel (de Werra, 1970). *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráf éleit meg lehet k színnel úgy színezni, hogy minden v csúcsra és mindegyik j színre ($j = 1, \ldots, k$) a v-be menő $d(v)$ darab él közül $\lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $\lceil d(v)/k \rceil$ darab színe j. Ráadásul minden színosztály mérete választható közel egyformának, vagyis $\lfloor |E|/k \rfloor$ vagy $\lceil |E|/k \rceil$ elemszámúnak.*

Ha k-t a maximális Δ fokszámnak választjuk, akkor megkapjuk Kőnig élszínezési tételét, amely szerint páros gráf kromatikus indexe (élszínezési száma) a maximális fokszámmal egyenlő. Ha k-t a minimális δ fokszámnak választjuk, akkor Gupta egy tételét kapjuk, amely szerint G páros gráf élhalmaza felbontható δ részre úgy, hogy mindegyik rész fedi az összes pontot. ■

Párosítások pakolása. A fenti lineáris programozási megközelítést használva néhány sorban levezethető Folkman és Fulkerson [18] alábbi, kevésbé közismert tétele.

9.2.5. tétel (Folkman és Fulkerson, 1969). *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik l darab élidegen k élű párosítás, ha*

$$i_G(Z) \geq l\big(k + |Z| - |U|\big) \tag{9.6}$$

fennáll $U := S \cup T$ minden Z részhalmazára, ahol $i_G(Z)$ jelöli a Z által feszített élek számát.

9.2.2. Hálózati optimalizálás

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, melynek $(0, 1, -1)$-es incidencia mátrixát jelölje Q. Egy $\pi : V \to \mathbf{R}$ vektort akkor neveztünk a $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvényre nézve megengedett potenciálnak, ha $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$ fennáll minden $uv \in A$ élre. Figyeljük meg, hogy egy π vektor pontosan akkor megengedett potenciál, ha $\pi Q \leq c$. Egy $x : A \to \mathbf{R}$ vektor pedig pontosan akkor áram, ha $Qx = 0$. Nem nehéz megmutatni, hogy Gallai a megengedett potenciál létezésére vonatkozó 1.1.2. tétele rögtön következik a Farkas lemma TU-mátrixokra vonatkozó élesebb alakjából. Hoffman 1.5.3. tétele megengedett áramok létezésére szintén könnyen levezethető.

A dualitás tétel TU-mátrixokra vonatkozó élesített alakjából könnyen kiadódik Duffin 1.1.3. tétele is. Hasonlóképp megkaphatók a minimális költségű fonatokra és ciklusokra vonatkozó 1.5.5. és 1.5.4. tételek. Ezen az úton juthatunk el az irányított kínai postás problémájának megoldásához valamint egy aciklikus digráf minimális útfedéseiről szóló tételhez is.

9.2.6. tétel. *Egy $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfban azon új, meglévővel párhuzamosan behúzott élek minimális száma, melyek hozzáadásával Euler-féle digráfot kapunk egyenlő a következő maximummal:*

$$\max\left\{\sum\left[\delta(V_i) - \varrho(V_i) : i = 1, \dots, q\right]\right\}, \tag{9.7}$$

ahol a maximum a V részhalmazaiból álló olyan $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_q$ megengedettnek nevezett halmazláncokra megy, melyek tagjaira $\delta(V_i) - \varrho(V_i) \geq 0$, és amelyekre igaz, hogy D semelyik éle sem lép egynél több V_i halmazba.

9.2.7. tétel. *Legyen $D = (V, A)$ aciklikus digráfban $F \subseteq A$ az éleknek egy kijelölt részhalmaza, és legyen γ pozitív egész. A γ darab (nem feltétlenül élidegen) irányított úttal lefedhető F-élek maximális száma egyenlő a következő minimummal:*

$$\min\{\gamma q + \text{az egyik } V_h\text{-ba sem lépő } F\text{-élek száma}\}, \tag{9.8}$$

ahol a minimum a V részhalmazainak olyan q tagú $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_q$ halmazláncaira megy, amelynek tagjaiból nem vezet ki D-beli él.

Ebből könnyen levezethető a Dilworth-tétel általánosítása, a korábban már említett Greene-féle 1.5.11. tétel is.

Algoritmus. Fontos hangsúlyozni, hogy minden olyan lineáris programozási feladat, amelynek feltételi mátrixa hálózati mátrix vagy annak transzponáltja egyszerű fogással átalakítható áram problémává. Emiatt a legolcsóbb megengedett áram kiszámítására kidolgozott algoritmus alkalmazható és így a szakaszban ismertetett valamennyi problémára létezik polinomiális futásidejű megoldó algoritmus.

9.3. Egész poliéderek

Bár a TU feltételi mátrixokra vonatkozó „egészértékű" dualitás tétel számos hálózati optimalizálási és párosítási probléma megoldásában segít, olyan korábban megismert alaptételek, mint a Lucchesi–Younger tétel, Tutte diszjunkt fa tétele vagy Nash–Williams irányítási tétele nem vezethetők le ily módon.

Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy nem lehetne-e a teljes unimodularitási feltételt enyhíteni úgy, hogy az általa meghatározott poliéder csúcsai még mindig egész pontok (rácspontok) legyenek. Hoffman és Kruskal 9.1.6. tétele, (amely szerint ha egy mátrixhoz tartozó bizonyos poliéderek mind egészek, akkor a mátrix szükségképpen teljesen unimoduláris,) látszólag kizárja ezt a megközelítési lehetőséget.

J. Edmonds azonban a hatvanas évek elején egy forradalmian új ötlet segítségével megkerülte ezt a nehézséget. Az elképzelés a (digráf minimális kötéseiről szóló) Lucchesi–Younger tételen szemléltetve az, hogy próbáljuk meg a kötések incidencia vektorainak konvex burkát egyenlőtlenségekkel leírni, mert akkor a kapott lineáris rendszerre már alkalmazhatjuk a dualitás tételt és így a minimális kötés elemszámára (vagy költségére) egy min-max tételt nyerhetünk. A terv megvalósíthatóságának irányában biztató jel, hogy a lineáris programozás egyik alaptétele szerint $\mathbf{R}^n$-ben tetszőlegesen vett véges sok pont konvex burka előállítható véges sok féltér metszeteként, azaz leírható lineáris egyenlőtlenségekkel (röviden minden politop előáll poliéderként).

Az egyik nehézség az, hogy hiába létezik az elvi lehetőség ilyen leírásra, nem világos, hogy a keresett egyenlőtlenségeket miként lehet explicit megadni. Rádásul nagyon is valószínűtlen, hogy ez minden kombinatorikus optimalizálási problémánál sikerülhet, hiszen akkor NP-teljes problémákra is nyerhetnénk jó karakterizációt (min-max tételt).

A másik nehézség az, hogy ha még sikerülne is az egyenlőtlenségek explicit megadása, előfordulhat, hogy a gráf méretében exponenciálisan sok kell belőlük. Mármost Edmonds felismerésének a lényege az, hogy ettől önmagában nem kell megijedni: a szóbanforgó egyenlőtlenségek megadása segítségével fel tudjuk írni a dualitás tételt, és erre majd kifejleszthetünk közvetlen megoldó algoritmust, amely már nem támaszkodik az exponenciálisan sok egyenlőtlenségre.

Alapvető az egész poliéderek következő jellemzése. A tételt korlátos poliéderre A. Hoffman [42] bizonyította, míg az általános eset Edmonds és Gilestól [14] való.

9.3.1. tétel (Hoffman – 1974, Edmonds és Giles – 1977). *Az $R := \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéder (Q, b egész) akkor és csak akkor egész, ha minden olyan c egész vektorra, amelyre $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos, a $\max\{cx : x \in R\}$ szám egész.*

Teljesen duálisan egészértékű rendszerek. Gyakran a 9.3.1. tételt olyan módon használják, hogy valamely $\max\{cx : Qx \leq b\}$ lineáris program $\min\{by : y \geq 0, yQ = c\}$ duálisáról minden egész c-re kimutatják, hogy ha van egyáltalán optimális megoldása, akkor van ilyen egész is. Ekkor a $Qx \leq b$ rendszert **teljesen duálisan**

egészértékűnek (total dual integral: TDI) hívják. (Ez tehát az egyenlőtlenségrendszer tulajdonsága és nem a rendszer által definiált poliéderé.) A TU mátrixról mondottak értelmében minden TU mátrixszal megadott lineáris rendszer TDI. Ki fog azonban derülni, hogy léteznek egyéb TDI rendszerek is.

Hasznos W. Cook [4] alábbi eredménye, amely azt mondja ki, hogy ha egy TDI rendszer egyik egyenlőtlenségét egyenlőséggel helyettesítjük, akkor továbbra is TDI rendszert kapunk.

9.3.2. tétel (Cook, 1983). *Amennyiben a* $\{Qx \leq b,\ qx \leq \beta\}$ *rendszer TDI* (ahol Q, q, b, β egész), *úgy a* $\{Qx \leq b,\ qx = \beta\}$ *rendszer is TDI.*

Megjegyzés. A TDI-ség definíciója és a 9.3.1. tétel a dualitás tétellel karöltve egy rövid szóhasználatot tesz lehetővé. Ahelyett például, hogy explicit megfogalmaznánk Egerváry 1.3.4. tételét elég csak annyit mondanunk, hogy az $\{Ax = b,\ x \geq 0\}$ rendszer TDI, ahol A a páros gráf incidencia mátrixa. Ebből ugyanis már a dualitás tétel és az egészértékűség miatt az Egerváry tétel kiolvasható. Ezért a továbbiakban már (kivételektől eltekintve) nem fogalmazzuk meg a szóbanforgó (egészértékű) min-max tételt, csupán annyit mondunk, hogy a szóbanforgó rendszer TDI.

10. Polimatroidok és általánosításaik

10.1. Általánosított polimatroidok

Edmonds két nagy területen kezdte el kidolgozni az általa felvázolt programot. Az egyik a nem-páros gráfok párosításainak elmélete, a másik a szubmoduláris függvényeké. Az elsőben a paritás fogalma központi szerepet játszik, így ennek bemutatása a jelen írásnak nem célja. Ugyanakkor viszonylag részletesen áttekintjük a szub- és szupermoduláris függvényekhez kapcsolódó egész poliédereket, az ezekre vonatkozó fő eredményeket és alkalmazásokat.

10.1.1. Matroidok poliéderei

A legegyszerűbb egész poliéderek, melyek nem írhatók le TU mátrixokkal matroidokkal kapcsolatosak. Edmonds [9] poliéderként meghatározta egy $M = (S, r)$ matroid független részhalmazainak a $P(r)$ és a bázisainak a $B(r)$ konvex burkát.

10.1.1. tétel (Edmonds, 1970). $P(r) = \big\{x \in \mathbf{R}^S : x \geq 0,\ x(Z) \leq r(Z)$ *minden* $Z \subseteq S$*-re*$\big\}$ *és* $B(r) = \big\{x \in \mathbf{R}^S : x \geq 0,\ x(Z) \leq r(Z)$ *minden* $Z \subseteq S$*-re és* $x(S) = r(S)\big\}$.

Valójában Edmonds többet bizonyított:

10.1.2. tétel. *Az* $\big\{x \geq 0,\ x(Z) \leq r(Z)$ *minden* $Z \subseteq S$*-re*$\big\}$ *lineáris rendszer TDI.*

A bizonyítás a matroid mohó algoritmusból könnyen kiolvasható. Sokkal mélyebb a matroid metszet-tételt is magában foglaló következő eredmény.

10.1.3. tétel (Edmonds). *Legyen $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ két matroid. Ekkor az*

$$(10.1) \qquad \{x \geq 0,\ x(Z) \leq \min\{r_1(Z), r_2(Z)\} \text{ minden } Z \subseteq S\text{-re}\}$$

rendszer TDI. Ha a két matroidnak van közös bázisa, úgy az

$$(10.2) \qquad \{x \geq 0,\ x(S) = r_1(S), x(Z) \leq \min\{r_1(Z), r_2(Z)\} \text{ minden } Z \subseteq S\text{-re}\}$$

rendszer TDI.

Ebből következik (a 9.3.1. tétel segítségével), hogy a két matroid közös független halmazainak politopját a (10.1) rendszer írja le, míg a közös bázisokét a (10.2). A közös bázisok, illetve függetlenek politopjainak ez a leírása azért rendkívül fontos, mert ennek birtokában már használhatjuk a lineáris programozás dualitás tételét és az optimalitási kritériumokat. Ezek nélkül nehezen volna elképzelhető bármilyen súlyozott matroidmetszet algoritmus. Olvassuk ki (a dualitás tétel segítségével) Edmonds súlyozott matroid metszet-tételét [9].

10.1.4. tétel (Edmonds, 1970). *Legyen $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ két matroid és $c : S \to \mathbf{R}+$ súlyfüggvény. A maximális súlyú közös független halmaz súlya egyenlő a*

$$(10.3) \qquad \min\left\{\sum [y_1(Z)r_1(Z) + y_2(Z)r_2(Z) : Z \subseteq S]\right\}$$

értékkel, ahol a minimum az olyan $y_i : 2^S \to \mathbf{R}_+$ $(i = 1, 2)$ nemnegatív vektorokra megy, melyekre

$$(10.4) \qquad \sum [y_1(Z) + y_2(Z) : s \in Z] \geq c(s) \text{ minden } s \in S\text{-re}].$$

Az optimális (y_1, y_2) választható úgy, hogy mind a $\{Z : y_1(Z) > 0\}$, mind a $\{Z : y_2(Z) > 0\}$ halmazrendszer halmazlánc legyen. Ha c egészértékű, az optimális (y_1, y_2) is választható egészértékűnek.

A $c \equiv 1$ speciális esetben megkapjuk a 7.2.4 matroid metszet-tételt. Analóg tétel érvényes a közös bázisok maximális súlyára.

10.1.5. tétel (Edmonds, 1970). *Legyen $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ két olyan matroid, melyeknek van közös bázisa, és legyen $c : S \to \mathbf{R}$ súlyfüggvény. A maximális súlyú közös bázis súlya egyenlő a $\min\left\{\sum [y_1(Z)r_1(Z) + y_2(Z)r_2(Z) : Z \subseteq S] : y_1 : 2^S \to \mathbf{R},\ y_2 : 2^S \to \mathbf{R},\ \sum [y_1(Z) + y_2(Z) : s \in Z] \geq c(s) \text{ minden } s \in S\text{-re}]\right\}$. Az optimális (y_1, y_2) választható úgy, hogy mind a $\{Z : y_1(Z) = 0\}$, mind a $\{Z : y_2(Z) = 0\}$ halmazrendszer halmazlánc. Ha c egészértékű, az optimális (y_1, y_2) is választható egészértékűnek.*

A 7.2.6. tételben egyszerűbb (bár a 10.1.5. tételből is levezethető) formula szerepelt a közös bázisok maximális súlyára.

10.1.2. Szub- és szupermoduláris függvények poliéderei

A gráfelméletben gyakran tűnnek fel olyan szubmoduláris függvények, melyek nem matroid rangfüggvényei. Például, a $G = (S, T; E)$ páros gráfban az S részhalmazain értelmezhetjük a $|\Gamma(X)|$ függvényt, ahol $\Gamma(X)$ jelöli az $X \subseteq S$ halmaz T-beli szomszédainak halmazát. Nem nehéz kimutatni, hogy ez a halmazfüggvény szubmoduláris, monoton növő (azaz $X \subseteq Y \subseteq S$ esetén $|\Gamma(X)| \leq |\Gamma(Y)|$) és persze az üres halmazon nulla. Ugyanakkor $|\Gamma(X)|$ tipikusan nem szubkardinális. Találkozhatunk olyan szubmoduláris függvényekkel is, amelyek még csak nem is monotonak (például egy irányított gráf csúcsainak részhalmazain értelmezett ϱ befok függvény). Még az is előfordulhat, hogy a függvény nem minden részhalmazon értelmezett, a $\pm\infty$ értéket is felveheti, vagy hogy a szubmodularitás nem minden halmazpárra teljesül.

Az alábbiakban a matroid poliédereknél általánosabb, szub- vagy szupermoduláris függvényekkel definiálható poliédereket vizsgálunk. Hacsak az ellenkezőjét nem mondjuk, végig feltesszük, hogy valamennyi szóbanforgó p és b függvény egészértékű. Adott p és b halmazfüggvényekre definiáljuk az alábbi poliédereket, melyeknél a $B(b)$ és $B'(p)$ definíciójában feltesszük, hogy $b(S)$, illetve $p(S)$ véges értékű.

$$P(b) := \{x \in R^S : x \geq 0,\ x(A) \leq b(A) \text{ minden } A \subseteq S\}$$

$$S(b) := \{x \in R^S : x(A) \leq b(A) \text{ minden } A \subseteq S\}$$

$$B(b) := \{x \in R^S : x(S) = b(S),\ x(A) \leq b(A) \text{ minden } A \subseteq S\}$$

$$C(p) := \{x \in R^S : x \geq 0,\ x(A) \geq p(A) \text{ minden } A \subseteq S\}$$

$$S'(p) := \{x \in R^S : x(A) \geq p(A) \text{ minden } A \subseteq S\}$$

$$B'(p) := \{x \in R^S : x(S) = p(S),\ x(A) \geq p(A) \text{ minden } A \subseteq S\}.$$

A b és p függvényeket a szóbanforgó poliéderek (felső, illetve alsó) **határfüggvény**einek nevezzük. Ha b polimatroid-függvény, $P(b)$-t **polimatroid**nak hívjuk. Az üres halmazt is polimatroidnak tekintjük. Ha b teljesen szubmoduláris, $S(b)$ **szubmoduláris poliéder.** (Bár nem igazán szerencsés, hogy az alaphalmaz és a szubmoduláris poliéder jelölésére is ugyanazt az S betűt használjuk, remélhetőleg eme megjegyzés nyomán ez mégsem fog zavart okozni.) Ha b teljesen szubmoduláris és $b(S)$ véges, $B(b)$ **bázis-poliéder.** Az üres halmazt is bázis-poliédernek tekintjük. Amennyiben $b(S) = 0$, **0-bázis-poliéder**ről beszélünk. Szupermoduláris p esetén, ha $p(S)$ véges, akkor a $\overline{p}(X) := p(S) - p(S - X)$ által definiált $\overline{p}$ komplementer függvény szubmoduláris, (amelyre $\overline{p}(\emptyset) = 0$ és $\overline{p}(S) = p(S)$), és könnyen láthatóan $B(\overline{p}) = B'(p)$. Emiatt a $B'(p)$ poliédert is bázis-poliédernek fogjuk hívni. Amint kiderül, $B(b)$ keresztező szubmoduláris b függvény esetén is (esetleg üres) bázis-poliédert alkot.

Ha p teljesen szupermoduláris, $S'(p)$ **szupermoduláris poliéder.** Ha ráadásul p nemnegatív (amiből következik, hogy véges értékű és monoton növő), úgy az $S'(p)$ szupermoduláris poliéder neve **kontra-polimatroid.**

A polimatroid fogalma Edmondstól származik [9]. A 10.1.1. tétel szerint egy matroid függetlenjeinek politopja (a rangfüggvényhez tartozó) polimatroid.

Általánosabb konstrukcióhoz jutunk az aggregálás segítségével. Egy $\mathbf{R}^S$-beli halmaz Q **aggregált**ját egy $\varphi : S \to S'$ leképezés segítségével definiáljuk. Ez meghatározza az S egy $\{S_1, \dots, S_q\}$ partícióját, ahol S_i jelöli azon $v \in S$ elemek halmazát, melyekre $\varphi(v) = s_i$ és $S' := \{s_1, \dots, s_q\}$. Egy x vektor $x' = \varphi(x)$ aggregáltjára $x'(s') := \sum \big[x(s) : s \in \varphi^{-1}(s')\big] \quad (s \in S')$. Egy $R \subseteq \mathbf{R}^S$ halmaz $\varphi(Q)$ aggregáltján a Q elemeinek aggregáltjaiból álló halmazt értjük, azaz $\varphi(R) := \big\{\varphi(x) : x \in R\big\}$. Végül egy S-en értelmezett b halmazfüggvény $\varphi(b) = b'$ aggregáltját a $b'(X) := b\big(\varphi^{-}(X)\big)$ formula definiálja.

Igazolható, hogy egy matroid poliéder aggregáltja polimatroid és Lovász [50] megmutatta igazolta ennek egy megfordítását is.

10.1.6. tétel (Lovász, 1977). *Minden polimatroid egy matroid poliéder aggregáltja.*

Matroidos ideákat általánosítva Edmonds kidolgozta az olyan polimatroidokra vonatkozó alaperedményeket, mint a mohó algoritmus vagy a polimatroid metszettétel. Azt is kimutatta, hogy egy P nemüres polimatroid egyértelműen meghatározza a határfüggvényét, nevezetesen $b(Z) = \max\big\{x(Z) : x \in P\big\}$. Belátta továbbá, hogy egy polimatroid metszete a $0-1$ egységkockával egy matroid poliédere.

Később a fenti rokon poliéderekre is a polimatroidokra vonatkozó tételekhez hasonló eredményeket igazoltak, így az egységes tárgyalás érdekében érdemes a polimatroid fogalmát kissé kiterjeszteni. Adott p és b halmazfüggvényekre tekintsük a következő poliédert.

$$Q(p, b) := \big\{x \in R^S : p(A) \le x(A) \le b(A) \text{ minden } A \subseteq S\big\}\text{-re.} \tag{10.5}$$

A [22] dolgozatban került bevezetésre az általánosított polimatroid fogalma. Azt mondjuk, hogy a (p, b) halmazfüggvényekből álló pár **paramoduláris** (vagy röviden **erős pár,** ha p teljesen szupermoduláris, b teljesen szubmoduláris és **összeillők** (compliant), azaz a

$$b(X) - p(Y) \ge b(X - Y) - p(Y - X) \tag{10.6}$$

kereszt-egyenlőtlenség fennáll minden $X, Y \subseteq S$ halmazra. Ha (p, b) paramoduláris párra $Q(p, b)$ poliédert **általánosított polimatroid**nak (vagy röviden g-**polimatroid**nak nevezzük.) Megállapodás szerint az üres halmazt is g-polimatroidnak tekintjük (bár ez nem definiálható paramoduláris párral). A (p, b) pár a Q **határpár**ja, p a Q **alsó,** b pedig a **felső határfüggvény**e.

10.1.7. tétel. *Paramoduláris (p, b) pár által definiált $Q = Q(p, b)$ g-polimatroid nemüres és egyértelműen meghatározza az őt definiáló paramoduláris párt, éspedig*

$$b(Z) = \max\{x(Z) : x \in Q\} \quad \text{és} \quad p(Z) = \min\{x(Z) : x \in Q\}. \tag{10.7}$$

Egészértékű (p, b) esetén az optimalizáló x is választható egésznek.

10.1.3. Példák és alaperedmények

Adott $f : S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ és $g : S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ egészértékű függvényekre, melyekre $f \leq g$, a $T(f, g) := \{x \in \mathbf{R}^S : f \leq x \leq g\}$ tégla g-polimatroid. Adott $\alpha \leq \beta$ egészekre a $\{x \in \mathbf{R}^S : \alpha \leq x(X) \leq \beta\}$ sáv g-polimatroid. Valójában több is igaz.

10.1.8. tétel. *A $Q(p, b)$ g-polimatroid és a $T(f, g)$ tégla M metszete g-polimatroid. Ha M nemüres, akkor az M (p', b') határpárja a következő:*

$$p'(Z) = \max\{p(X) - g(X - Z) + f(Z - X) : X \subseteq S\}, \tag{10.8}$$

$$b'(Z) = \min\{b(X) - f(X - Z) + g(Z - X) : X \subseteq S\}. \tag{10.9}$$

10.1.9. tétel. *Az $M := Q(p, b) \cap K(\alpha, \beta)$ metszet g-polimatroid. Ha M nemüres, akkor az M (p', b') határpárja a következő.*

$$p'(Z) := \max\{p(Z),\ \alpha - b(S - Z)\} \tag{10.10}$$

és

$$b'(Z) := \min\{b(Z),\ \beta - p(S - Z)\}. \tag{10.11}$$

Matroidok bázisaiból. Legyen M egy r rang- és t ko-rang függvényű matroid S-en és legyen $\{S_1, \ldots, S_q\}$ az S egy részpartíciója. A q elemű S' halmazon értelmezett $z(i)$ $i \in S'$) vektort nevezzünk **metszet-vektor**nak, ha M-nek van olyan B bázisa, amelyre $z(i) = |B \cap S_i|$ $(i \in S')$. A metszet-vektorok politopja nem más, mint $P(M)$ poliéder aggregáltja és így g-polimatroid, melyet a (p_M, b_M) paramoduláris pár definiál, ahol az $X \subseteq S'$ halmazra legyen $b_M(X) := r\big(\cup [S_i : i \in X]\big)$ és $p_M(X) := t\big(\cup [S_i : i \in X]\big)$.

Speciális esetben kapjuk, hogy ha $S \subset V$ a $G = (V, E)$ összefüggő gráf egy stabil ponthalmaza és minden feszítő fához tekintjük a fa S-beli fokszámainak vektorát, akkor ezen vektorok konvex burka g-polimatroid.

Irányításokból. Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Egy $m : V \to \mathbf{Z}$ egészértékű vektort **befok vektor**nak nevezünk, ha G-nek létezik olyan irányítása, amelyben minden v pont befoka $m(v)$. A 3.1.5. irányítási lemmából tudjuk, hogy adott $m : V \to \mathbf{Z}$ vektor akkor és csak akkor befok vektor, ha $m(V) = |E|$ és $m(X) \geq i(X)$ minden $X \subseteq V$-re, vagy ekvivalensen $m(Y) \leq e(Y)$ minden $Y \subseteq V$-re, ahol $i(X)$ az X által feszített élek száma, míg $e(Y)$ azon éleké, melyek egyik vége legalább X-ben van. Ebből kiolvasható az alábbi.

10.1.10. tétel. *Legyen $S \subseteq V$ adott részhalmaz. Egy $G = (V, E)$ gráf irányításainak befok-vektorai az S-re megszorítva egy g-polimatroidot feszítenek, melynek definiáló erős párja $(i_G \mid S, e_G \mid S)$. Speciálisan, az irányítások befok-vektorai bázispoliédert feszítenek.*

Az alábbi tétel [22] mutatja, hogy az általánosított polimatroid fogalma rászolgál a nevére.

10.1.11. tétel. *Polimatroid, szubmoduláris poliéder, kontra-polimatroid, bázispoliéder mindegyike g-polimatroid. Egy g-polimatroid oldala, vektorral való eltoltja, tengely menti vetülete, origóra való tükörképe, egy $\{x \in \mathbf{R}^S : f \leq x \leq g\}$ téglával való metszete és egy $\{x \in \mathbf{R}^S : \alpha \leq x(S) \leq \beta\}$ alakú sávval való metszete is g-polimatroid.*

Bár a g-polimatroid fogalma nagy rugalmasságot tesz lehetővé, tartalmilag nem sokkal általánosabb a polimatroidnál [26]:

10.1.12. tétel. *Minden g-polimatroid egy eggyel magasabb dimenziós 0-bázispoliéder tengelymenti vetülete. Minden 0-bázis-poliéder megkapható egy matroid bázisainak poliéderéből eltolással és homomorf kép képzéssel.*

10.1.4. Aggregált, összeg, metszet

A matroidoknál megismert homomorfia, metszet és összegtételek kiterjeszthetők g-polimatroidokra.

Aggregálás.

10.1.13. tétel (Aggregálási tétel). *Ha (p, b) paramoduláris, akkor a $Q = (p, b)$ g-polimatroid aggregáltja g-polimatroid, melynek határpárja $\big(\varphi(p), \varphi(b)\big)$, azaz $\varphi(Q) = Q\big(\varphi(p), \varphi(b)\big)$. Ráadásul, ha p és b egészértékű, úgy $Q\big(\varphi(p), \varphi(b)\big)$ minden x' egész eleme előáll egy egész $x \in Q$ elem képeként.*

Megjegyzendő, hogy egy matroid homomorf képének poliédere nem más, mint a matroid poliéderének aggregáltja elmetszve a $0-1$ kockával.

Legyen M matroid az S alaphalmazon r rang- és t ko-rangfüggvényel. Legyen $\mathcal{P} := \{S_1, \ldots, S_q\}$ az alaphalmaz egy részpartíciója. Az $(m_1, \ldots, m_q)$ vektort **bázis-vetület**nek mondjuk, ha létezik M-nek olyan B bázisa, melyre $|B \cap S_i| = m_i$ minden $i = 1, \ldots, q$-ra.

10.1.14. következmény. *Egy $(m_1, \ldots, m_q)$ egész vektor akkor és csak akkor bázisvetület, ha az m bármely j komponensének összege legalább $t(X)$ és legfeljebb $r(X)$, ahol X a j komponensnek megfelelő j darab S_i halmaz uniója. A bázis-vetületek egy g-polimatroid* (éspedig a $B(r)$ aggregáltja vetületének) *egész pontjai.*

Összeg. Emlékeztetünk, hogy az $R_1, \ldots, R_k$ $\mathbf{R}^S$-beli halmazok összegén (néha Minkowski összegén) azon elemek halmazát értik, melyek előállnak az R_i-kből vett egy-egy elem összegeként. Adott (p_i, b_i) $(i = 1, \ldots, k)$ paramoduláris párok összege nyilván paramoduláris.

10.1.15. tétel (Összegtétel). *$\sum_i Q(p_i, b_i) = Q(\sum_i p_i, \sum_i b_i)$. Ráadásul, ha mindegyik p_i, b_i egészértékű, akkor $Q\big(\sum_i p_i, \sum_i b_i\big)$ minden egész eleme előáll a Q_i-kből vett egy-egy egész elem összegeként.*

Hogyan viszonylik a matroid összeg fogalma a polimatroid összeghez? Egy $P(b)$ polimatroid metszete a $T(0, 1)$ egységkockával egy matroid függetlenjeinek poliéderét alkotja, amely matroidban egy $F \subseteq S$ halmaz akkor és csak akkor független, ha $x = \chi_F$ benne van $P(b')$-ben. Ez azzal ekvivalens, hogy $|F \cap X| \leq b(X)$ minden $X \subseteq F$-re. Amennyiben a b polimatroid függvény k matroid rangfüggvényének az összege, úgy a kapott matroid éppen a k matroid összege.

Metszet. Edmonds [9] kiterjesztette matroid metszet-tételét polimatroidokra is. Ezt rögtön g-polimatroidokra fogalmazzuk meg.

10.1.16. tétel (G-polimatroid metszet-tétel). *A (p_1, b_1) és (p_2, b_2) paramoduláris párok által definiált $Q_1 := Q(p_1, b_1)$, illetve $Q_2 := Q(p_2, b_2)$ g-polimatroidok $M := Q_1 \cap Q_2$ metszete akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$p_1 \leq b_2 \ \text{ és } \ p_2 \leq b_1. \tag{10.12}$$

Ha M nemüres, akkor tartalmaz egész pontot.

Figyeljük meg, hogy a metszet tételt egy $Q_1 = S(b)$ szubmoduláris és egy $Q_2 = S'(p)$ szupermoduláris poliéderre alkalmazva éppen a 7.1.5. diszkrét szeparációs tételhez jutunk. Ugyanakkor egyszerű konstrukció segítségével megmutatható, hogy a szeparációs tétel is implikálja a a 10.1.16. tételt. Kiderül azonban [22], hogy a metszet nem csak hogy tartalmaz egész pontot, hanem valójában egész poliéder, sőt a leíró egyenlőtlenség rendszer TDI.

10.1.17. tétel. *Ha (p_1, b_1) és (p_2, b_2) paramoduláris párok, akkor a*

$$\{p_1(Z) \leq x(Z) \leq b_1(Z),\ p_2(Z) \leq x(Z) \leq b_2(Z)\} \text{ minden } Z \subseteq S\text{-re}\} \tag{10.13}$$

rendszer TDI. Speciálisan, a $Q(p_1, b_1) \cap Q(p_2, b_2)$ metszet poliéder egész.

10.1.5. G-polimatroidok lánctulajdonsága

A metszet-tétel speciális eseteként megadható, hogy egy g-polimatroid metszete téglával és sávval mikor nemüres.

10.1.18. tétel. *Legyen (p, b) paramoduláris pár és legyen $\alpha \leq \beta$ két szám (ahol α lehet $-\infty$, β pedig ∞). Tegyük fel az $f : S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$, $g : S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ függvényekre, hogy $f \leq g$. Az $M := Q(p, b) \cap T(f, g) \cap K(\alpha, \beta)$ metszet pontosan akkor nemüres, ha*

$$f(X) \leq b(X) \ \text{ és } \ f(X) \leq \beta - p(S - X) \ \text{ minden } X \subseteq S\text{-re} \tag{10.14}$$

és

$$g(X) \geq p(X) \ \text{ és } \ g(X) \geq \alpha - b(S - X) \ \text{ minden } X \subseteq S\text{-re.} \tag{10.15}$$

A tételből kiolvasható a lánctulajdonság erős alakja. Látni fogjuk, hogy a korábban irányításoknál és növeléseknél felbukkant láncszabály hátterében ez a tétel áll.

10.1.19. tétel (Erős lánctulajdonság). *Ha egy $Q(p,b)$ g-polimatroidnak létezik olyan x eleme, amelyre $x' \geq f$ és $x'(S) \leq \beta$, továbbá létezik olyan x'' eleme, amelyre $x'' \leq g$ és $x''(S) \geq \alpha$, akkor olyan x eleme is létezik, amelyre $f \leq x \leq g$ és $\alpha \leq x(S) \leq \beta$. Ha p, b, f, g, α, β mindegyike egészértékű, úgy x is választható annak.*

Az $f \equiv -\infty$, $\alpha = -\infty$ esetben kapjuk a következőt.

10.1.20. következmény. *Ha egy g-polimatroidnak létezik olyan x eleme, amelyre $x'(S) \leq \beta$, továbbá létezik olyan x'' eleme, amelyre $x'' \leq g$, akkor létezik olyan x eleme is, amelyre $x(S) \leq \beta$ és $x \leq g$.*

Az $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$ esetben következőt adja.

10.1.21. következmény (Lánctulajdonság). *Ha létezik a Q g-polimatroidnak olyan x' eleme, melyre $x' \geq f$ és létezik Q-nak olyan x'' eleme, amelyre $x'' \leq g$ eleme, akkor létezik olyan x eleme is, amelyre $f \leq x \leq g$. Ha p, b, f, g mindegyike egészértékű, úgy x is választható annak.*

Matroid metszet-vektorai. A 10.1.3. szakaszban említettük, hogy egy matroid metszet-vektorai g-polimatroidot feszítenek. Ezt a 10.1.18. tétellel kombinálva megkapjuk 7.2.5. tételt. Valójában még általánosabban olyan független halmaz létezését is jellemezhetjük, amelynek elemszáma α és β közé esik, továbbá S egy adott partíciójának minden X tagjával való metszete legalább $f(X)$ és legfeljebb $g(X)$ elemű.

10.1.6. A mohó algoritmus

A mohó algoritmus bázis-poliéderen. Edmonds megfigyelte, hogy a matroidokra vonatkozó mohó algoritmus kiterjeszthető polimatroidokra is. Az alábbiakban Edmonds eredményét bázis-poliéderekre ismertetjük. Legyen b teljesen szubmoduláris és véges értékű. Adott $c : S \to \mathbf{R}$ vektorra tekintsük a $\max\{cx : x \in B(b)\}$ optimalizálási feladatot. Ez nem más, mint a

$$\max\{cx : x(S) = b(S) \text{ és minden } Z \subset S\text{-re } x(Z) \leq b(Z)\} \tag{10.16}$$

lineáris program, amelynek duálisa:

$$\min\{yb : y \in D(c)\}, \tag{10.17}$$

ahol $yb := \sum_{Z \subseteq S} y(Z)b(Z)$ és

$$D(c) := \left\{y \in \mathbf{R}^{2^S} : y(Z) \geq 0, \text{ ha } Z = S, \text{ és } \sum_{Z \subseteq S} y_Z \chi_Z = c\right\} \tag{10.18}$$

a duális poliéder.

Feltehető, hogy c komponensei nagyság szerint csökkenő sorrendben vannak elrendezve, azaz $c(s_1) \geq c(s_2) \geq \cdots \geq c(s_n)$. Jelölje S_i az első i elem halmazát. Definiáljuk az x_{mo} vektort a következőképp.

$$(10.19) \qquad x_{mo}(s_1) := b(s_1), \quad \text{és} \quad i = 2, \ldots, n\text{-re} \quad x_{mo}(s_i) := b(S_i) - b(S_{i-1}).$$

Definiáljuk az y^* vektort a következőképp.

$$(10.20) \qquad y^*(S_n) := c(s_n), \quad \text{és} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\text{-re} \quad y^*(S_i) := c(s_i) - c(s_{i+1})$$

és S tetszőleges más részhalmazán legyen $y^*(Z) := 0$.

10.1.22. tétel. *x_{mo} optimális megoldása az* (10.16) *primál programnak, y^* optimális megoldása a* (10.17) *duál programnak.*

A mohó algoritmus geometriailag. Előfordulhat, hogy a B bázis-poliéder nem teljesen szubmoduláris függvénnyel van megadva. Ekkor a fenti algoritmust nem tudjuk közvetlenül használni. Mégis a mohó algoritmus következő interpretációja sokszor segíthet.

A célfüggvény által meghatározott csökkenő sorrendben végigmegyünk az elemeken és egymás után megállapítjuk az $x(s_i)$ értékeket. Az aktuális $x_i = x(s_i)$ értéket a lehető legnagyobbra választjuk úgy, hogy létezzék olyan $(x_1, \ldots, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ vektor $B(b)$-ben. Itt $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ a már kiszámított komponenseket jelöli. Ennek az értelmezésnek az az előnye, hogy független attól, hogy a bázis-poliéder milyen formában van megadva és így reményt nyújt arra, hogy az aktuális x_i-t esetleg akkor is ki tudjuk számolni, ha az egyértelmű definiáló teljesen szubmoduláris függvény nem áll rendelkezésre.

A mohó algoritmus más g-polimatroidokon. Mi a helyzet, ha szubmoduláris poliéder felett akarjuk cx célfüggvény maximumát megkeresni? Az (10.16) maximalizálási probléma duálisában az $y(S)$ kivételével minden $y(Z)$ változóra nem-negativitást követeltünk. Az algoritmus szerinti $y^*(S)$ pontosan akkor lesz negatív, ha a célfüggvény legkisebb, $c(s_n)$ komponense negatív. Amennyiben az $S(b)$ szubmoduláris poliéder felett akarjuk maximalizálni cx-t és $c(s_n) \geq 0$, úgy a fent kapott primál és duál megoldás erre is jó lesz. Ha viszont $c(s_n) < 0$, akkor a $\max\{cx : x \in S(b)\}$ feladat nem is korlátos felülről, hiszen $S(b)$ tetszőleges x eleméből kiindulva az $x(s_n)$ komponenst tetszőlegesen csökkenthetjük és ezzel a célfüggvény értéke is tetszőlegesen naggyá válhat.

Tudjuk, hogy kontra-polimatroid (is) előáll bázis-poliéder vetületeként, ezért a mohó algoritmust erre is át lehet fogalmazni. Most minimalizálni akarjuk a cx célfüggvényt a C kontra-polimatroid felett, ezért az előbbi algoritmus így hangzik. Rendezzük c szerint csökkenő sorrendbe az S elemeit. Az aktuális $x_i = x(s_i)$ értéket a lehető legkisebbre választjuk úgy, hogy létezzék $(x_1, \ldots, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ vektor C-ben. (Ez a mohó algoritmus a közismert Kruskal féle algoritmus „óvatos" változatának felel meg, ahol egy összefüggő gráf minimális költségű feszítő fájának meghatározása úgy történik, hogy minden lépésben a legdrágább élt hagyjuk ki a gráfból csak arra ügyelve, hogy összefüggő maradjon.)

Hogyan tudjuk meghatározni az aktuális s_i-re a minimális $x(s_i)$ értéket? Egy egyszerű megfigyelés segít. Jelölje k a $p(X)$ maximális értéket. Könnyű igazolni, hogy ha $(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$ benne van C-ben, akkor $(x_1, \dots, x_i, k, k, \dots, k)$ is benne van. Ennek megfelelően a mohó algoritmus úgy módosul, hogy az aktuális x_i-t minimálisra választjuk arra való tekintettel, hogy $(x_1, \dots, x_i, k, k, \dots, k)$ benne van C-ben.

10.2. A szubmodularitás gyengítése

10.2.1. Jórészt szub- és szupermoduláris függvények

A g-polimatroidokra bemutatott eredmények széleskörű felhasználását az teszi lehetővé, hogy g-polimatroidokat nem csak paramoduláris párral lehet definiálni, hanem olyan függvényekkel is, melyekre a szub- vagy szupermodularitási egyenlőtlenséget nem minden $\{X, Y\}$ halmazpárra teljesül. Mindez annak mintájára, ahogy a 7.2.12. tétel révén metsző szubmoduláris függvények segítségével lehetett matroidokat definiálni.

Egy (p, b) halmazpárt **metsző** vagy **metsző paramoduláris**nak mondunk, ha mind b, mind $-p$ metsző szubmoduláris és átmetsző halmazpárokra fennáll a kereszt-egyenlőtlenség (X ás Y **átmetsző**, ha $X - Y$, $Y - X$, $X \cap Y$ egyike sem üres). Azt mondjuk, hogy a p nem-negatív függvény **pozitívan metsző szupermoduláris**, ha $p(X) > 0, p(Y) > 0$ és $X \cap Y \neq \emptyset$ esetén $p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y)$. A p-t **ferdén szupermoduláris**nak mondjuk, ha nemnegatív és minden $X, Y \subseteq S$-re, amelyre $p(X) > 0, p(Y) > 0$, a következő egyenlőtlenségek közül legalább az egyik teljesül:

$$p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y),$$

$$p(X) + p(Y) \leq p(X - Y) + p(Y - X).$$

Ebből látszik, hogy pozitívan metsző szupermoduláris függvény ferdén szupermoduláris.

10.2.1. tétel. *Ha (p, b) metsző paramoduláris pár, akkor $Q(p, b)$ g-polimatroid. Ha b és p keresztező szubmoduláris, illetve szupermoduláris függvény, akkor $B(b)$ és $B'(p)$ is g-polimatroid. Ha p ferdén szupermoduláris, akkor $C(p)$ g-polimatroid* (éspedig kontra-polimatroid).

Érdemes azonban a metsző szub- és szuper- és paramodularitás fogalmát még tovább gyengíteni. Az $X \subseteq S$ részhalmazt a b halmazfüggvényre nézve **alulról b-szeparálható**nak nevezzük (rövidebben alulról szeparálható), ha X felbontható olyan nemüres, diszjunkt $X_1, X_2, \dots, X_t$ részhalmazok egyesítésére, melyekre $\sum_i b(X_i) \leq b(X)$. Azt mondjuk, hogy b **jórészt szubmoduláris**, ha bármely két alulról lényeges X, Y halmazra, melyekre $X \cap Y \neq \emptyset$, fennáll a szubmodularitási egyenlőtlenség. Például metsző szubmoduláris függvény jórészt szubmoduláris. Analóg módon beszélhetünk egy p halmazfüggvény esetén arról, hogy az X halmaz

felülről p-szeparálható és hogy p **jórészt szupermoduláris**. Amennyiben a szövegösszefüggésből világos, az alulról vagy felülről jelzőket kihagyjuk. Végül, azt mondjuk, hogy a (p, b) pár **jórészt paramoduláris**, ha p és b jórészt szuper-, illetve szubmoduláris és a kereszt-egyenlőtlenség teljesül minden olyan átmetsző X, Y halmazpárra, melyre X alulról nem b-szeparálható és Y felülről nem p-szeparálható.

Nem nehéz igazolni, hogy szimmetrikus és pozitívan keresztező szupermoduláris függvény ferdén szupermoduláris, továbbá ferdén szupermoduláris függvény jórészt szupermoduláris.

10.2.2. Reszelés

Bemutatunk egy fontos konstrukciót, a reszelést (Dilworth truncation), amely egy jórészt szubmoduláris függvényből teljesen szubmodulárisat hoz létre. A b jórészt szubmoduláris függvény $b^\vee$ (**alsó**) **reszelt**jén a következő halmazfüggvényt értjük:

$$b^\vee(Z) := \min\left\{\sum_i^t b(X_i) : \{X_1, \dots, X_t\} \text{ a } Z \text{ partíciója, } t \geq 1\right\}. \tag{10.21}$$

Mivel most az egytagú $\{Z\}$ is a Z partíciójának számít, így $b^\vee \leq b$.

A p jórészt szupermoduláris függvény $p^\wedge$ (**felső**) **reszelt**jén a következő halmazfüggvényt értjük:

$$p^\wedge(Z) := \max\left\{\sum_i^t p(X_i) : \{X_1, \dots, X_t\} \text{ a } Z \text{ partíciója, } t \geq 1\right\}. \tag{10.22}$$

Mivel most az egytagú $\{Z\}$ is az Z partíciójának számít, így $p^\wedge \geq p$.

10.2.2. tétel (Reszelési tétel). *Jórészt szubmoduláris b függvény $b^\vee$ reszeltje teljesen szubmoduláris. Ha ráadásul $b \geq 0$, akkor b monoton reszeltje teljesen szubmoduláris és monoton növő. Jórészt szupermoduláris p függvény $p^\wedge$ reszeltje teljesen szupermoduláris, monoton reszeltje teljesen szupermoduláris és monoton növő.*

A reszelési tételt a diszkrét szeparációs tétellel kombinálva nyerjük annak kiterjesztését.

10.2.3. tétel. *Legyen b jórészt szubmoduláris és p jórészt szupermoduláris. Akkor és csak akkor létezik olyan m moduláris függvény, amelyre $p \leq m \leq b$* (más szóval, az $M = S(b) \cap S'(p)$ metszet akkor és csak akkor nemüres), *ha*

$$p^\wedge \leq b^\vee, \tag{10.23}$$

vagyis, ha az S minden Z részhalmazának bármely két $\{X_i\}$ és $\{Y_j\}$ partíciójára

$$\sum_i p(X_i) \leq \sum_j b(Y_j). \tag{10.24}$$

Ha p és b egészértékű, úgy m választható egészértékűnek.

A reszelt kiszámítása. A bázis poliéderekre vonatkozó mohó algoritmus segítségével kiszámíthatjuk egy b jórészt szubmoduláris függvényre a $b^\vee(S)$ értéket. Feltesszük, hogy b véges értékű. A 10.1.7. tételből adódóan tetszőleges b^* teljesen szubmoduláris függvény esetén $b^*(S) = \max\{x(S) : x \in B(b^*)\}$. A mohó algoritmus elvileg ki tud számítani egy optimális x-t, feltéve, hogy egy bizonyos szubrutin rendelkezésre áll.

Legyen $s_1, \ldots, s_n$ az elemek tetszőleges sorrendje és legyen $S_i := \{s_1, \ldots, s_i\}$. Tegyük fel, hogy az $x^*(s_1), \ldots, x^*(s_{k-1})$ értékeket már meghatároztuk. Válasszuk $x^*(s_k)$-t a lehető legnagyobb olyan α értékre, hogy ezen választással még ne sérüljön $x^*(X) \leq b(X)$ egyenlőtlenség, vagyis legyen

$$\alpha := \min\{b(Z) - x^*(Z - s_k) : s_k \in Z \subseteq S_k\}. \tag{10.25}$$

A bázis poliéderekre vonatkozó mohó algoritmus szerint az ezen szabállyal kiszámolt x^* vektor olyan lesz, hogy $x^*(S) = b^\vee(S) = \min\left\{\sum_i b(T_i) : \{T_1, \ldots, T_t\} \text{ partíciója } S\text{-nek}\right\}$. Konkrét b esetén a számolást akkor tudjuk végrehajtani, ha rendelkezésre áll egy szubrutin (10.25)-ben α kiszámítására.

Amennyiben a szubrutin nem csak a minimum értékét számítja ki, hanem azt is megmondja, hogy az mely Z halmazon vétetik fel, úgy a $b^\vee(S)$-t megvalósító optimális $\{T_1, \ldots, T_t\}$ partíciót is kiszámolhatjuk. Ehhez tekintsük a szubrutin által szolgáltatott minimalizáló $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ halmazokat. Tudjuk, hogy x^* benne van $B(b^\vee)$-ben, és a Z_i halmazok mind pontosak (abban az értelemben, hogy $x^*(Z_i) = b^\vee(Z_i)$. Márpedig pontos halmazok metszete és uniója is pontos, így a $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ hipergráf komponensei az alaphalmaznak egy pontos halmazokból álló $\{T_1, \ldots, T_t\}$ partícióját adják, amiből $b^\vee(S) = x^*(S) = \sum_i x^*(T_i) = \sum_i b(T_i)$ miatt $\{T_1, \ldots, T_t\}$ valóban a keresett partíció.

10.2.3. Jórészt paramoduláris párral adott g-polimatroidok

10.2.4. tétel. *Jórészt (speciális esetben: metsző) paramoduláris (p, b) pár esetén $Q(p, b)$ g-polimatroid, amely egész, ha (p, b) egészértékű. $Q(p, b)$ akkor és csak akkor nemüres, ha az S alaphalmaz minden $\{Z_1, \ldots, Z_t\}$ részpartíciójára*

$$p(\cup Z_i) \leq \sum_i b(Z_i) \quad \text{és} \quad \sum_i p(Z_i) \leq b(\cup Z_i). \tag{10.26}$$

$Q(p, b)$ határpárját ki lehet ugyan fejezni p és b függvényében, de a kiadódó formula némileg bonyodalmas. Szubmoduláris poliéderek, bázis-poléderek, kontrapolimatroidok esetén azonban a határfüggvények közvetlenül felírhatók a reszelt segítségével.

10.2.5. tétel. *Legyen b jórészt szubmoduláris. Ekkor $S(b)$ szubmoduláris poliéder, melynek határfüggvénye $b^\vee$. Ha $b(S)$ véges, akkor $B(b)$ bázis-poliéder, amelynek felső határfüggvénye nemüres $B(b)$ esetén $b^\vee$. Ha ráadásul $b \geq 0$, akkor $P(b)$ polimatroid, melynek b' határfüggvénye a b monoton reszeltje, azaz*

$$b'(Z) := \min\left\{\sum_i b(X_i) : \{X_1, \ldots, X_t\} \text{ részpartíció, } Z \subseteq \cup X_i \subseteq S\right\}. \tag{10.27}$$

Analóg eredmény érvényes jórészt szupermoduláris p esetén az $S'(p)$ és $B'(p)$ poliéderekre.

10.2.6. tétel. *Jórészt szubmoduláris függvénnyel adott $B(b)$ bázis-poliéder akkor és csak akkor nem üres, ha S minden $\{S_1, \ldots, S_k\}$ partíciójára $\sum_i b(S_i) \geq b(S)$ (azaz $b^\vee(S) = b(S)$). Jórészt szupermoduláris függvénnyel adott $B'(p)$ bázis-poliéder pontosan akkor nemüres, ha $\sum_i p(S_i) \geq p(S)$ minden partícióra.*

Speciális esetként kapjuk a következőt.

10.2.7. tétel. *Legyen p_1 jórészt szupermoduláris, melyre $k := p_1(S)$ véges és $f : S \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $g : S \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f \leq g$. A $B'(p_1) \cap T(f, g)$ poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$f(S) \leq k, \tag{10.28}$$

$$f(X_0) + \sum_{i=1}^{t} p_1(X_i) \leq k \tag{10.29}$$

az S minden olyan $\{X_0, X_1, \ldots, X_t\}$ $(t \geq 1)$ partíciójára, amelyben csak X_0 lehet üres, és

$$g(X) \geq p_1(X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re.} \tag{10.30}$$

Fenyő-pakolások. Edmonds 4.2.2. fenyő-tétele szerint *egy digráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen s-gyökerű feszítő fenyő, ha minden s-t nem tartalmazó nemüres csúcshalmaz befoka legalább k.* Ebből rögtön következik az alábbi általánosítás. *Legyen $D = (U, A)$ irányított gráf és $m : V \to \mathbf{Z}_+$ egészértékű vektor, amelyre $m(U) = k$. D-ben akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fenyő úgy, hogy mindegyik v csúcs pontosan $m(v)$ fenyőnek a gyökere, ha*

$$\varrho_D(X) \geq k - m(X) \text{ fennáll minden } \emptyset \subset X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{10.31}$$

(Valóban, vegyünk fel egy új s pontot és vezessünk s-ből minden v pontba $m(v)$ párhuzamos élt és alkalmazzuk az Edmonds tételt). Nevezzünk egy ilyen m vektort **gyökérvektor**nak. Az U alaphalmazon értelmezzük a p_1 függvényt a $p_1(X) := \left(k - \varrho(X)\right)^+$ képlettel, ha $X \neq \emptyset$. Ekkor p_1 pozitívan metsző szupermoduláris, és ezért $B'(p_1)$ bázis-poliéder. A 10.31 lépletből adódik, hogy a gyökérvektorok pontosan a $B'(p_1)$ bázis-poliéder egész pontjai. A 10.2.7. tétel alkalmazásával visszajutunk a szabad gyökerű fenyők pakolásáról szóló 4.2.9. tételhez.

10.2.4. Keresztező szubmoduláris függvények

A 7.2.5 szakaszban említettük, hogy keresztező szubmoduláris függvények segítségével is definiálhatjuk egy matroid bázisait. Ez általánosítható bázis-poliéderekre.

10.2.8. tétel ([22]). *Ha b keresztező szubmoduláris és $b(S)$ véges, akkor $B(b)$ bázis-poliéder, amely egész, ha b egészértékű.*

Fujishige [37] megadta a nemüresség feltételét.

10.2.9. tétel (Fujishige, 1984). *$B(b)$ akkor és csak akkor nemüres, ha az S minden $\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_t\}$ partíciójára*

$$\sum_i b(S_i) \geq b(S) \tag{10.32}$$

és

$$\sum_i b(S - S_i) \geq (t-1)b(S). \tag{10.33}$$

A teljes reszelt. Egy keresztező szubmoduláris függvénnyel adott $B(b)$ bázispoliéder (teljesen szubmoduláris) felső határfüggvényének meghatározása azonban bonyolultabb annál, mint amilyen a reszelt volt a speciálisabb metsző szubmoduláris esetben. Ezért szükségünk van egy partíciónál bonyolultabb fogalomra. Egy $\mathcal{K}$ hipergráfról azt mondjuk, hogy a $Z \subset S$ nemüres részhalmaz **kompozíció**ja, ha $\mathcal{K}^+ := \mathcal{K} \cup \{S - Z\}$ kompozíciója S-nek. $\mathcal{K}$ **alapfedési** száma a $\mathcal{K}^+$ fedési száma minusz 1. Speciálisan a Z egy partíciója kompozíciója Z-nek, melynek alapfedési száma 0. A Z egy ko-partíciója is kompozíciója Z-nek, (ahol a **ko-partíció** egy $\{S - V_1, S - V_2, \ldots, S - V_t\}$ halmazrendszer, melyre $\{V_1, \ldots, V_t\}$ az $S - Z$ partíciója). Ennek alapfedési száma $t-1$.

A partíciónál és ko-partíciónál általánosabb kompozíció a dupla-partíció. Ehhez legyen $\{Z_1, \ldots, Z_t\}$ a Z egy partíciója. Mindegyik Z_i-re legyen $\{Z_i^1, \ldots, Z_i^{t_i}\}$ az $S - Z_i$ halmaz egy partíciója ($t_i \geq 1$). Ekkor az $\{S - Z_i^j\}$ halmazok rendszerét a Z egy **dupla-partíció**jának nevezzük. A dupla-partíció tehát a Z valamely partíciójában szereplő halmazok ko-partícióiból áll. Könnyen látható, hogy Z duplapartíciója valóban a Z kompozícióját alkotja, amelynek alapfedési száma a $(t_i - 1)$ értékek összege.

Tegyük fel, hogy a keresztező szubmoduláris b függvényre $B(b)$ nemüres. Definiáljuk a $b^{\downarrow}$ függvényt $b(S) = 0$ esetben a következőképp. Egy nemüres $Z \subset S$ halmazra legyen

$$b^{\downarrow}(Z) = \min\left\{ \sum_{\{i,j\}} b(Z_i^j) : \{Z_i^j\} \text{ az } Z \text{ dupla-partíciója} \right\}. \tag{10.34}$$

Tömörebben,

$$b^{\downarrow}(Z) = \min\{b(\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ a } Z \text{ dupla-partíciója}\}. \tag{10.35}$$

Az általános esetben legyen $b^{\downarrow}(Z) = \min\{b(\mathcal{D}) - fb(S)\}$, ahol a minimum a Z halmaz $\mathcal{F}$ dupla-partícióira megy és f az $\mathcal{D}$ alapfedési száma. A $b^{\downarrow}$ a b függvény **teljes** (alsó) **reszelt**jének nevezzük. (Analóg módon definiálható egy keresztező szupermoduláris függvény teljes felső reszeltje.)

10.2.10. tétel ([24]). *Ha b keresztező szubmoduláris és a $B(b)$ bázis-poliéder nem üres, akkor $b^{\downarrow}$ teljesen szubmoduláris és a $B(b)$ bázis-poliéder felső határfüggvénye $b^{\downarrow}$.*

A tétel esztétikai hiányossága, hogy egy dupla-partícióban lévő halmazok kuszán helyezkedhetnek el és túl sok ($O(n^2)$) lehet belőlük. Kimutatható azonban, hogy elegendő speciális, fa-kompozíciónak nevezett dupla-partíciókra szorítkozni, melyek keresztezés-mentesek és csak $n-1$ halmazt tartalmazhatnak. Ehhez feltesszük, hogy b olyan keresztező szubmoduláris függvény, amelyre a $B(b)$ bázis-poliéder nemüres és $b(S)=0$.

A $Z \subset S$ halmaz egy **fa-kompozícióját** a Z-nek egy $\{Z_1, \dots, Z_k\}$ ($k \geq 1$) partíciójával, az $S-Z$-nak egy $\{U_1, \dots, U_l\}$ ($l \geq 1$) partíciójával, valamint a $\{z_1, \dots, z_k, u_1, \dots, u_l\}$ ponthalmazon adott olyan F irányított fával lehet megadni, melynek minden éle egy u_i pontból vezet egy z_j pontba. A fa-kompozíció tagjai és az F élei között egy-egy értelmű megfeleltetés van a következő szerint. A fa egy e élének elhagyásával keletkező két komponens közül jelölje Z_e azt, amelyikbe e belép. A Z_e-ben lévő z_i, illetve u_j fabeli csúcsoknak megfelelő Z_i, illetve U_j halmazok uniója legyen az a tagja a fa-kompozíciónak, amelyek az e faélnek megfelel. Megállapodás szerint az S alaphalmaz fa-kompozícióján az S egy partícióját vagy ko-partícióját értjük.

10.2.11. tétel ([29]). *Legyen b olyan keresztező szubmoduláris függvény, amelyre $b(S)=0$ és $B(b)$ nemüres. Ekkor*

$$b^{\downarrow}(Z) = \min\{b(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ a } Z \text{ fa-kompozíciója}\}. \tag{10.36}$$

Ha $b(S)$ tetszőleges, akkor $b^{\downarrow}(Z) = \min\{b(\mathcal{F}) - fb(S) : \mathcal{F}$ a Z fa-kompozíciója és f ennek alapfedési száma.$\}$

Két g-polimatroid metszete

10.2.12. tétel. *Legyen (p_1, b_1) és (p_2, b_2) két egészértékű, jórészt paramoduláris pár. Ekkor a $\{p_1(Z) \leq x(Z) \leq b_1(Z),\ p_2(Z) \leq x(Z) \leq b_2(Z)$ minden $Z \subseteq S$-re$\}$ egyenlőtlenségrendszer TDI. Speciálisan, a $Q(p_1, b_1)$ és $Q(p_2, b_2)$ g-polimatroidok metszete egész poliéder.*

10.2.13. tétel. *Legyen b_1 és b_2 két egészértékű, keresztező szubmoduláris függvény, melyekre $b_1(S) = b_2(S) = k$. Ekkor az $\{x(S) = k,\ x(Z) \leq b_1(Z),\ x(Z) \leq b_2(Z)$ minden $Z \subseteq S$-re$\}$ egyenlőtlenségrendszer TDI. Speciálisan, a $B(b_1)$ és $B(b_2)$ bázis-poliéderek metszete egész poliéder.*

11. Szub- és szupermoduláris függvények digráfokon

Két meglehetősen általános modellt mutatunk be, amelyekben szub- és szupermoduláris függvények és irányított gráfok szerepelnek.

11.1. Szubmoduláris áramok

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $f : A \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$, $g : A \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ két egészértékű korlátozó függvény, melyekre $f \leq g$. Ezen kívül $b : 2^V \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ egészértékű keresztező szubmoduláris halmazfüggvény, amelyre $b(\emptyset) = b(V) = 0$. Egy $x : A \to \mathbf{R}$ vektort **szubmoduláris áram**nak nevezünk, ha

$$\lambda_x(Z) := \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \leq b(Z) \tag{11.1}$$

minden $Z \subseteq V$-re, amely **megengedett,** ha

$$f \leq x \leq g. \tag{11.2}$$

A megengedett szubmoduláris áramok halmazát **szubmoduláris áram poliéder**nek hívjuk. Azt mondjuk, hogy a szubmoduláris áramot (vagy a poliédert) a b függvény **határolja.** Amennyiben b azonosan 0, visszajutunk a megengedett áram fogalmához.

11.1.1. Kapcsolat g-polimatroidokhoz

Q_D-vel jelölve a D digráf $(0, \pm 1)$-es pont-él incidencia-mátrixát és λ_x-t egy V-n értelmezett függvénynek tekintve, $\lambda_x = Q_D x$ adódik. Miután $B(b)$ bázis-poliédert alkot, egy $x : A \to \mathbf{R}$ vektor pontosan akkor szubmoduláris áram, ha a $\lambda_x : V \to \mathbf{R}$ vektor $B(b)$-ben van. Egy bázis-poliédert más alakban is meg lehetett adni, például egy p keresztező szupermoduláris függvény segítségével $B'(p)$ alakban, vagyis ilyenkor a $\{\varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V\text{-re}\}$ rendszer egy megoldása is szubmoduláris áram. Ezért éppoly joggal beszélhetnénk szupermoduláris áramokról. Ráadásul jórészt paramoduláris (p, b) párra is $Q(p, b)$ g-polimatroid, így ennek a $\{z : z(V) = 0\}$ hipersíkkal való metszete is 0-bázis-poliéder. Emiatt az $\{x \in \mathbf{R}^A : \lambda_x \in Q(p, b)\}$ halmaz is szubmoduláris áram poliéder, vagy kiírva: $p(Z) \leq \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \leq b(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re. Ennek alapján leghelyesebb volna paramoduláris áram poliéderről beszélni, amelyet akár szubmoduláris, akár szupermoduláris függvénnyel is lehet definiálni. Megmaradunk azonban a szubmoduláris áram kifejezés használata mellett, mert ez a szakirodalomban már meghonosodott.

Szubmoduláris áramok és g-polimatroidok között a pontos kapcsolatot az alábbi tételek írják le [34].

11.1.1. tétel. *Legyen (p_1, b_1) és (p_2, b_2) két metsző paramoduláris pár. A $Q_1 = Q(p_1, b_1)$ és $Q_2 = Q(p_2, b_2)$ g-polimatroidok metszete szubmoduláris áram poliéder.*

11.1.2. tétel. *Legyen b teljesen szubmoduláris függvény, amelyre $b(V) = 0$. Ekkor $Q = Q(f, g; b) \subseteq \mathbf{R}^A$ szubmoduláris áram poliéder előáll, mint két $2|A|$ dimenziós bázis poliéder metszetének a vetülete.*

11.1.2. Optimalizálás

Alapvető a következő eredmény.

11.1.3. tétel (Edmonds és Giles, 1977). *A* $\{(11.1), (11.2)\}$ *rendszer teljesen duálisan egészértékű. Speciálisan, ha* b, f, g *mind egészértékű, akkor a szubmoduláris árampoliéder egész.*

A folyamokra és áramokra valamint a súlyozott matroid metszetre meglévő algoritmusok közös általánosításaként kidolgozásra kerültek [24, 25] megengedett, illetve optimális szubmoduláris áramokat kiszámító polinomiális algoritmusok is (lásd még Fujishige [38] könyvét.)

A 11.1.3. tétel speciális eseteként könnyen kiolvasható Lucchesi és Younger 2.2.3. tétele, mely szerint *egy digráfban az egyirányú vágásokat lefogó élek minimális száma egyenlő a diszjunkt egyirányú vágások maximális számával.*

Hasonló jellegű tétel érvényes a minimális elemszámú egyirányú vágásokra.

11.1.4. tétel. *Tegyük fel, hogy a minimális egyirányú vágásnak* k *éle van. Ekkor az élidegen* k*-elemű irányított vágások maximális száma egyenlő a* k*-elemű irányított vágásokat lefogó élek minimális számával.*

Ebből síkdualizálással adódik a következő érdekesség.

11.1.5. következmény. *Egy irányított síkgráfban az élidegen minimális elemszámú irányított körök maximális száma egyenlő a minimális köröket lefogó élek minimális számával.*

11.1.3. Megengedettség

Az áramok megengedettségére vonatkozó Hoffman féle 1.5.3. tétellel analóg jellemzés adható a szubmoduláris áramokra is [24, 29].

11.1.6. tétel (Frank, 1982). *Adottak a* $D = (V, A)$ *digráf élhalmazán az* $f \leq g$ *korlátok, valamint a* b *halmazfüggvény. Akkor és csak akkor létezik megengedett szubmoduláris áram*

(A) *teljesen szubmoduláris* b *esetén, ha minden* $Z \subseteq V$*-re,*

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq b(Z) \tag{11.3}$$

(B) *metsző szubmoduláris* b *esetén, ha minden* $Z \subseteq V$*-re és* Z *minden* $\{V_1, \dots, V_t\}$ *partíciójára*

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq \sum_i b(V_i), \tag{11.4}$$

(C) *keresztező szubmoduláris* b *esetén, ha minden* $Z \subseteq V$*-re és* Z*-nek minden* $\mathcal{F}$ *fa-kompozíciójára*

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq \sum \left[b(X) : X \in \mathcal{F}\right]. \tag{11.5}$$

Ha f, g, b *mindegyike egészértékű és létezik megengedett szubmoduláris áram, akkor létezik egészértékű is.*

A $b \equiv 0$ esetben visszajutunk Hoffman tételéhez, de Edmonds 7.2.4 matroid metszettétele is éppoly könnyen következik, mint a 7.1.5 diszkrét szeparációs tétel. A (B) rész a 10.2.2 reszelési tételt felhasználva következik (A)-ból, a (C) rész pedig a teljes reszeltre megadott 10.36 formula segítségével.

11.2. Fedés digráfokkal

A 8.4. szakaszban már bevezettük a párhalmaz fogalmát és bemutattunk egy keresztező szupemoduláris párhalmazfüggvény minimális számú éllel való fedéséről szóló tételt. Itt a minimális költségű verzió már NP-teljes. Metsző szupermoduláris párhalmaz függvényre azonban jobb a helyzet.

Egy $p : \mathcal{P}_2 \to \mathbf{Z}_+$ párhalmaz függvényről azt mondjuk, hogy **pozitívan metsző szupermoduláris,** ha metsző $X, Y \in \mathcal{P}_2$ és $p(X) > 0$, $p(Y) > 0$ esetén $p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y)$. Amikor p csak olyan párhalmazokon pozitív, amelyeken $X_K = X_B$, akkor visszajutunk a halmazokon értelmezett metsző szupermoduláris (egyváltozós) halmazfüggvények fogalmához.

11.2.1. tétel ([36]). *A $D = (V, A)$ digráfra legyen adott $g : A \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ egészértékű kapacitás függvény. Legyen p pozitívan metsző szupermoduláris függvény $\mathcal{P}_2$-n, amelyre $\varrho_g(X_K, X_B) \geq p(X_K, X_B)$ fennáll $\mathcal{P}_2$ minden tagjára. Ekkor a*

$$\big\{0 \leq x \leq g,\ \varrho_x(X_K, X_B) \geq p(X_K, X_B), \text{ ha } (X_K, X_B) \in \mathcal{P}_2\big\} \tag{11.6}$$

egyenlőtlenség-rendszer teljesen duálisan egészértékű.

Adott $T \subseteq V$ esetén akkor mondjuk, hogy egy p halmazfüggvény pozitívan T-metsző szupermoduláris, ha $X \cap Y \cap T \neq \emptyset$ és $p(X) > 0, p(Y) > 0$ esetén fennáll a szupermodularitási egyenlőtlenség.

11.2.2. következmény. *Legyen $D = (V, A)$ digráfban legyen $g : A \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ egészértékű kapacitás függvény, továbbá $T \subset V$ a csúcsok egy olyan részhalmaza, amely tartalmazza az összes él fejét. Legyen p_1 egy pozitívan T-metsző szupermoduláris halmaz-függvény, amelyre $\varrho_g(X) \geq p_1(X)$. Ekkor a*

$$\big\{0 \leq x \leq g,\ \varrho_x(X) \geq p_1(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re}\big\} \tag{11.7}$$

egyenlőtlenség-rendszer teljesen duálisan egészértékű.

11.2.1. Gyökeres összefüggőség

Legyen $D = (V, A)$ digráf, amelyben s kijelölt gyökérpont.

11.2.3. tétel ([20]). *Ha D gyökeresen k-élösszefüggő, úgy D gyökeresen k-élösszefüggő részdigráfjainak poliédere $\{x : \varrho_x(Z) \geq k$ minden $\emptyset \subset Z \subseteq V - s$ halmazra és $0 \leq x(e) \leq 1$ minden $e \in A$ élre$\}$. A leírásban szereplő rendszer TDI.*

11.2.4. tétel ([36]). *Legyen $D = (V, A)$ s-ből gyökeresen k-pontösszefüggő. Ekkor D gyökeresen k-pontösszefüggő részdigráfjainak poliédere*

$$(11.8) \qquad Q := \{x : \varrho_x(X_K, X_B) \geq k - |X_K - X_B| \text{ ha } \emptyset \subset X_B \subseteq X_K \subseteq V - s, \text{ és } 0 \leq x(e) \leq 1 \text{ minden } e \in A \text{ élre}\}.$$

A leírásban szereplő rendszer TDI.

A fenti tételek segítségével választ kaphatunk a gyökeres pont- vagy élösszefüggőség növelésének problémájára is. Tegyük fel, hogy adott egy kiindulási $H = (V, F)$ digráf egy kijelölt gyökérponttal. Ezt kell megnövelnünk egy megadott $D = (V, A)$ digráf éleinek segítségével úgy, hogy a megnövelt digráf gyökeresen k-élösszefüggő (k-pontösszefüggő) legyen és a felhasznált D-beli élek összköltsége minimális legyen. A megoldáshoz a $H + D = (V, F + A)$ digráfban keresünk minimális költségű gyökeres k-élösszefüggő (k-pontösszefüggő) digráfot, ahol minden H-beli él költsége nulla. Az előbbi tételek felhasználásával (és a dualitás tétellel) könnyen felírható egy min-max formula az optimális növelés költségére. A $k = 1$ speciális esetben visszajutunk Fulkerson 1.2.5. tételéhez s gyökerű fenyők minimális költségéről.

12. Alkalmazások

12.1. Általános gráf-irányítási problémák

A 8.1 fejezetben megismert két fő irányítási tétel nem összemérhető. Az egyikben (8.1.1. tétel) a h igényfüggvény nemnegatív és keresztező szupermoduláris volt, a másikban (8.1.8. tétel) metsző szupermoduláris. Nyitva maradt azonban a közös általánosítás problémája, amikor az igényfüggvény keresztező szupermoduláris, de nem feltétlenül nemnegatív. Ennek megoldása azért is kívánatos, mert a vegyes gráf k-élösszefüggővé irányításának feladata erre vezet. Tisztázásra szorul továbbá, hogy a lánctulajdonság miért áll fenn bizonyos esetekben (gráf k-élösszefüggővé irányítása) és miért nem másokban (vegyes gráf k-élösszefüggővé irányítása).

Az alábbiakban jelezzük, hogy ezek a problémák miként kezelhetők szubmoduláris áramok, illetve polimatroidok segítségével egységes keretben. Kétféle visszavezetés is létezik szub-, illetve szupermoduláris modellekre: van amikor az egyik jobb, van amikor a másik.

Az első azon a megfigyelésen alapszik, hogy egy irányításban a pontok befokai meghatározzák a halmazok befokait, nevezetesen

$$(12.1) \qquad \varrho(Z) = \sum [\varrho(v) : v \in Z] - i_G(Z),$$

így a h-t fedő irányítás létezése egy olyan $m : V \to \mathbf{Z}$ befok-vektor létezésével ekvivalens, amelyre

$$(12.2) \qquad m(Z) \geq h(Z) + i_G(Z) \quad \text{minden } Z \subseteq V\text{-re.}$$

Miután a 3.1.5. irányítási lemma szerint m pontosan akkor egy irányítás befokvektora, ha $m(V) = |E|$ és $m(Z) \geq i_G(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re, érvényes a következő.

12.1.1. lemma. *Egy egész m vektor akkor és csak akkor egy h-t fedő irányítás befok-vektora, ha $m \in B'(i_G) \cap B'(h + i_G)$.*

12.1.1. Visszavezetés bázis-poliéderre

Legyen h keresztező szupermoduláris, melyre $h(V) = 0$. Ha h nemnegatív, akkor $h + i_G \geq i_G$, vagyis ilyenkor $B'(h + i_G) \subseteq B'(i_G)$ és ezért a befok-vektorok egy bázis-poliédert alkotnak. Ennek alapján a bázis-poliéderek nemürességére vonatkozó Fujishige-féle 10.2.9. tételből egyrészt rögtön leolvasható a 8.1.1. tétel, másrészt a g-polimatroidok lánctulajdonságából következik a h-t fedő irányítások befok-vektorainak lánctulajdonsága (8.1.3. tétel).

12.1.2. Visszavezetés két bázis-poliéder metszetére

Ha viszont h metsző szupermoduláris, amelyre a nemnegativitás nincsen kikötve, akkor már a h-t fedő irányítások befok-vektorai két bázis-poliéder metszetének az egész elemei és ezért nem várható el a lánctulajdonság megléte. Ugyanakkor a 10.2.3. szeparációs tételből kiolvasható a nemürességnek a 8.1.8. tételben megfogalmazott feltétele.

Ez a megközelítés azonban nem csak arra alkalmas, hogy meglévő eredményeket jobban megértve azokat újra bizonyítsuk, hanem korábban még nem szerepelt irányítási tételeket is nyerhetünk.

12.1.2. tétel. *Legyen h_1 és h_2 két keresztező G-szupermoduláris és szimmetrikus függvény, melyek közül h_2 nemnegatív, és legyen $h(X) := \max\{h_1(X), h_2(X)\}$. A $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, ha $d(X) \geq 2h(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra fennáll.*

Bizonyítás. A feltétel szükséges, hiszen egy h-t fedő irányításra $d(X) = \varrho(X) + \varrho(V - X) \geq h(X) + h(V - X) = 2h(X)$. A feltétel elegendőségéhez a fenti megfontolás alapján azt kell kimutatnunk, hogy létezik egy olyan m befok vektor, amelyre (12.2) fennáll. Másszóval azt kell kimutatnunk, hogy a $P := \{x \in \mathbf{R}^V : x \geq 0, x(V) = |E|, x(Z) \geq i(Z)$ és $x(Z) \geq h(Z) + i(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re$\}$. Miután h nemnegatív (most használjuk ki!), az $x(Z) \geq i(Z)$ egyenlőtlenség felesleges, vagyis $P = \{x \in \mathbf{R}^V : x \geq 0, x(V) = |E|, x(Z) \geq p_1(Z)$ és $x(Z) \geq p_2(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re$\}$, ahol $j = 1, 2$-re $p_j(Z) := h_j(Z) + i(Z)$. Miután p_j keresztező szupermoduláris, így P két bázis-poliéder metszete, és emiatt egész poliéder.

Ráadásul az $x^*(v) := d(v)/2$ által definiált x vektor benne van P-ben, hiszen egyrészt $x^*(V) = \sum[x^*(v) : v \in V] = \sum[d(v)/2 : v \in V] = |E|$, másrészt $Z \subset V$-re $x^*(Z) = \sum[x^*(v) : v \in Z] = \sum[d(v)/2 : v \in Z] = d(Z)/2 + i(Z) \geq h(Z) + i(Z)$. Vagyis a P egész poliéder tényleg nem üres, így van egész eleme. ■

Nash–Williams 3.4.2. tétele a $h_1(X) = k$, ha $\emptyset \subset X \subset V$ és $h_2 \equiv 0$ választással rögvest adódik, de valójában az alábbi csinos élesítést is könnyen kapjuk.

12.1.3. következmény. *Legyen G $(2k)$-élösszefüggő gráf és H a G-nek egy Euler-részráfja* (azaz H-ban minden pont foka páros). *Ekkor H-nak egy tetszőleges Euler-irányítását ki lehet terjeszteni a G-nek egy k-élösszefüggő irányításává.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 12.1.2. tételt az irányítatlan élek G' gráfjára a $h_1(Z) := k - d_H(Z)/2$ és $h_2 \equiv 0$ választással. ■

A Nash–Williams irányítási tétel egy rokon kiterjesztése a következő.

12.1.4. következmény. *Adott a $G = (V, E)$ k-élösszefüggő irányítatlan gráf éleinek egy F részhalmaza. Akkor és csak akkor lehet F elemeit úgy irányítani, hogy a keletkező vegyes gráf k-élösszefüggő legyen, ha $d_F(X) \leq 2\big(d_E(X) - k\big)$ fennáll minden $X \subset V$ nemüres részhalmazra.*

12.1.3. Visszavezetés szubmoduláris áramra

Keresztező szupermoduláris igényfüggvényekre gyakran kényelmesebb szubmoduláris áramokkal modellezni a problémát. Ehhez a G egy tetszőleges $D = (V, A)$ referencia irányításából indulunk majd ki, és ebben kell alkalmasan kijelölni azon éleket, amelyek megfordításával h-t fedő irányítást kapunk. A kijelölést egy $z : A \to \{0, 1\}$ vektorral végezzük, amelyre $z(a)$ pontosan akkor 1, ha az a él irányítását megfordítjuk. Az így kapott irányításban egy $X \subseteq$ halmaz befoka $\varrho_D(X) - \varrho_z(X) + \delta_z(X)$, vagyis ennek kell legalább $h(X)$-nek lennie. Akkor létezik tehát h-t fedő irányítás, ha a $Q = \big\{z : 0 \leq z \leq 1,\ \varrho_z(X) - \delta_z(X) \leq b(X) := \varrho_D(X) - h(X)\big\}$ poliédernek van egész (azaz $0-1$-es) eleme. Miután h keresztező szupermoduláris és i_G teljesen szubmoduláris, a b határfüggvény keresztező szubmoduláris, így alkalmazhatjuk a szubmoduláris áramok létezésére vonatkozó 11.1.6. tétel (C) részét.

12.1.5. tétel. *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és h keresztező szupermoduláris függvény, amelyre $h(\emptyset) = h(V) = 0$. G-nek akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, ha*

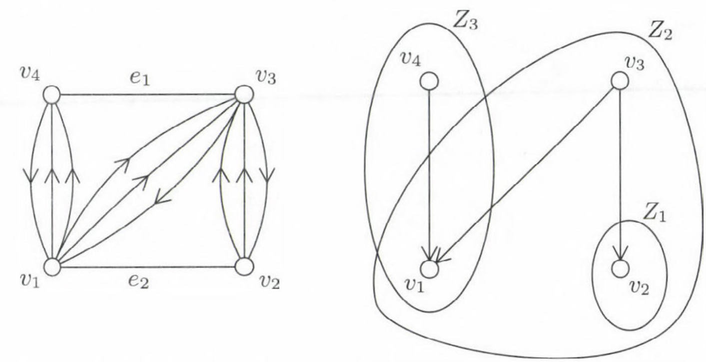
$$h(\mathcal{F}) \leq \sum_{j \in E} e_j(\mathcal{F}) \tag{12.3}$$

fennáll V minden Z részhalmazának minden $\mathcal{F}$ fa-kompozíciójára, ahol $e_j(\mathcal{F})$ annak a két számnak a maximumát jelzi, ahány $\mathcal{F}$-beli halmazba a j él egyik, illetve másik irányításánál belép.

Vegyes gráfok k-élösszefüggővé irányítása. Legyen $M = (V, A + E)$ vegyes gráf, G éleit akarjuk irányítani úgy, hogy a keletkező $(V, A + \vec{E})$ digráf k-élösszefüggő legyen. Definiáljuk a h függvényt az üres halmazon és V-n nullának, míg másutt $h(X) = k - \varrho_A(X)$. Ekkor h keresztező szupermoduláris, és az E-nek egy $\vec{E}$ irányítása pontosan akkor fedi h-t, ha $(V, A + \vec{A})$ k-élösszefüggő. Ezen h függvényre alkalmazva az 12.1.5. tétel első részét megkapjuk a vegyes gráf k-élösszefüggővé irányításának szükséges és elegendő feltételét.

A dolgozat I. részének 3.4. szakaszában példán mutattuk meg, hogy a feltételben nem elegendő csupán partíciókra és ko-partíciókra szorítkozni. A példában a $Z = \{v_1, v_2\}$ halmaznak $\mathcal{F} := \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ egy fa-kompozícióját alkotja, ahol

$Z_1 = \{v_2\}$, $Z_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $Z_3 = \{v_1, v_4\}$. Az $\mathcal{F}$ valóban a Z fakompozíciója, amelyet a Z-nek az $\{\{v_1\}, \{v_2\}\}$ partíciója, a $V - Z$-nek $\{\{v_3\}, \{v_4\}\}$ partíciója, és e partíciók tagjain értelmezett $f_1 = \{v_3\}\{v_2\}$, $f_2 = \{v_4\}\{v_1\}$, $f_3 = \{v_3\}\{v_1\}$ irányított fa-élek definiálnak. Ekkor egyrészt $h(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{3} [k - \varrho_A(Z_i)] = \sum_{i=1}^{3} [2 - 1] = 3$ másrészt $\sum_{j \in E} e_j(\mathcal{F}) = 1 + 1 = 2$, vagyis a 12.1.5. tételbeli feltétel nem teljesül.



Nincs 2-élösszefüggő irányítás

$\mathcal{F} := \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ fa-kompozíció

4. ábra

12.2. Az élösszefüggőség növelése

Kimutatjuk, hogy az élösszefüggőség növelési problémák hátterében is g-polimatroidok állnak.

12.2.1. Irányított növelés

A 8.2 szakaszban megmutattuk, hogy egy digráf élösszefüggőség növelési problémája miként fogalmazható meg absztrakt alakban egy keresztező szupermoduláris függvény fedési feladataként. Most is ezzel az általánosabb alakkal foglalkozunk.

Adott $D = (V, A)$ irányított gráfra nevezzünk egy $m_{\text{ki}} : V \to \mathbf{Z}$ vektort **növelési kifok-vektor**nak, ha létezik egy olyan $H = (V, F)$ digráf, amelyre $G + H = (V, A + F)$ k-élösszefüggő és $\delta_H(v) = m_{\text{ki}}(v)$ minden $v \in V$-re. A növelési befok-vektort analóg definiáljuk.

A 8.2.4. tételben megadtuk, hogy egy pozitívan keresztező p függvény mikor fedhető egy γ élű digráffal. A 8.2.3. tétel pedig jellemezte azon vektorokat, melyek egy p-t fedő digráf befok-vektorai.

Adott $\gamma \geq 0$ egész számra definiáljuk a p^γ függvényt a következőképpen.

$$p^\gamma(V) := \gamma \quad \text{és} \quad p^\gamma(X) := p(X), \quad \text{ha} \quad X \subset V. \tag{12.4}$$

Ha p fedhető γ éllel, akkor minden $X, Y \subset V$ diszjunkt halmazra $\gamma \geq p(V - X) + p(V - Y)$ és ezért ilyenkor p^γ pozitívan metsző szupermoduláris. A 10.2.5. tétel szerint ilyen függvény is bázis poliédert definiál, így kapjuk a következőt.

12.2.1. tétel. *Legyen γ olyan egész, amelyre p-nek létezik γ élű fedése. Ekkor p^γ pozitívan metsző szupermoduláris, a $B'(p^\gamma)$ bázis-poliéder nemüres és egész pontjai pontosan a p-t fedő γ élű digráfok befok-vektorai.*

Jelölje most γ a p-t fedő digráfok minimális élszámát. Ekkor az 12.2.1. tétel szerint p^γ pozitívan metsző szupermoduláris, és így $C(p^\gamma)$ kontra-polimatroidot alkot.

12.2.2. tétel. *A p-t fedő befok-vektorok pontosan a $C(p^\gamma)$ kontra-polimatroid egész elemei.*

Tekinthetjük a növelési és általánosabban a p-fedési feladatnak a minimális költségű változatát, amikor adott két nemnegatív költségfüggvény a ponthalmazon, c_{ki} és c_{be}, és egy új uv él költségét a $c_{\text{ki}}(v) + c_{\text{be}}(u)$ összeggel definiáljuk. A cél minimális költségű élhalmaz hozzáadásával D-t k-élösszefüggővé tenni. (Amennyiben az éleken egy tetszőleges költség vektor van megadva, a növelési probléma NP-teljes). Ehhez csak az kell, hogy a $C(p)$ (és az analóg módon definiált $C(\hat{p})$ kontra-polimatroidnak egy-egy minimális költségű m_{be} ill. m_{ki} elemét megkeressük, melyekre $m_{\text{ki}}(V) = m_{\text{be}}(V)$, majd alkalmazzuk a 8.2.2. tételt. A keresés a mohó algoritmus kontra-polimatroidra vonatkozó változatával történhet, amikor a definiáló p függvény pozitívan metsző szupermoduláris.

Mivel g-polimatroidokra érvényes a lánctulajdonság, a 12.2.2. tétel implikálja a növelések lánctulajdonságát kimondó 8.2.6. tételt. Sőt, az erős lánctulajdonság 10.1.20 következménye az alábbit is kiadja.

12.2.3. következmény. *Adott $D = (V, A)$ irányított gráf, $g_{\text{be}} : V \to \mathbf{Z}_+$ $g_{\text{ki}} : V \to \mathbf{Z}_+$ felső korlátok és γ egész. Tegyük fel, hogy D k-élösszefüggővé tehető legfeljebb γ él hozzáadásával, továbbá, hogy D k-élösszefüggővé tehető egy olyan digráf hozzáadásával, melynek be- és kifokait g_{be}, illetve g_{ki} felülről korlátozza. Ekkor D k-élösszefüggőve tehető egy olyan legfeljebb γ élű digráf hozzáadásával, amelynek be-, illetve kifokai teljesítik a felső korlátokat.*

12.3. Irányítatlan növelés

A fenti megfontolás átvihető az irányítatlan élösszefüggőség növelési problémára is, ráadásul a globális k-élösszefüggőség növelésénél általánosabb alakban. Minden $\{u, v\}$ pontpárra adott egy $r(u, v) \neq 1$ előírás, és úgy kell minimális számú élt a megadott $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráfhoz hozzáadni, hogy a megnövelt gráfban minden (u, v) pontpárra u és v között az élidegen utak maximális $\lambda(u, v)$ száma legalább $r(u, v)$ legyen. Vezessük be az $R(X) := \max\big\{r(u, v) : \big|\{u, v\} \cap X\big| = 1\big\}$ függvényt. R nyilván szimmetrikus és nem nehéz igazolni, hogy ferdén szupermoduláris. Azt mondjuk, hogy egy G^+ gráf fedi R-t, ha $d_{G^+} \geq R$.

A következő tételt W. Mader [53] eredetileg egy ekvivalens alakban fogalmazta meg, pontpárok lokális élösszefüggőségét megőrző leemelésekre vonatkozóan (5.3.2. tétel).

12.3.1. tétel. *Adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és egy $m : V \to \mathbf{Z}$ egész vektor, amelyre $m(V)$ páros, és nincs G-nek olyan K komponense, amelyre $m(K) = 1$. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ gráf, amelyre*

$$d_H(v) = m(v) \tag{12.5}$$

minden $v \in V$-re fennáll és

$$\lambda(x, y; G^+) \geq r(x, y) \tag{12.6}$$

teljesül minden x, y pontpárra, ahol $G^+ = G + H = (V, E \cup F)$, ha

$$m(X) \geq R_r(X) - d_G(X) \tag{12.7}$$

érvényes minden $X \subseteq V$ részhalmazra, ahol $R_r(X) := \max\{r(x, y) : x \in X,\ y \in V - X\}$.

Egy ilyen m vektort nevezzünk a növelés **fokszám vektorának**. Definiáljuk p-t függvényt a $p(X) := \big(R(X) - d_G(X)\big)^+$ $(X \subseteq V)$ képlettel. Ekkor $p(V) = 0$, p szimmetrikus és ferdén szupermoduláris. Adott $\gamma \geq 0$ egészre legyen

$$p^{2\gamma}(V) := 2\gamma \quad \text{és} \quad p^{2\gamma}(X) := p(X), \text{ ha } X \subset V. \tag{12.8}$$

Ekkor $p^{2\gamma}$ szimmetrikus és ferdén szupermoduláris és így jórészt szupermoduláris. A 10.2.5. tétel szupermoduláris változata folytán $B'(p^{2\gamma})$ bázis poliéder, amelynek egész elemei a γ élű növelés fokszám vektorai. A 10.2.7. tétel szerint $B'(p)$ akkor és csak akkor nem üres, ha minden $\{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartícióra $\sum_i p(X_i) \leq p(V)$. Ebből következik az I. rész 5.3.4. tétele irányítatlan gráfok lokális élösszefüggőségének növeléséről [28]:

12.3.2. tétel (Frank, 1992). *Adott $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráfhoz akkor és csak akkor létezik olyan γ élű $H = (V, F)$ gráf, amelyre $\lambda(u, v; G + H) \geq r(u, v)$ minden $\{u, v\}$ pontpárra, ha minden $\{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartícióra $\sum_i \big[R(X_i) - d_G(X_i)\big] \leq 2\gamma$. Az ilyen γ élű H gráfok fokszám vektorai pontosan a $B'(p^{2\gamma})$ bázis-poliéder egész elemei.*

Ismét a 10.1.20 következményből kapjuk:

12.3.3. következmény. *Adott $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf és $g : V \to \mathbf{Z}_+$ felső korlát. Ha létezik olyan $H = (V, F)$ gráf, amelyre $d_H(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra és*

$$\lambda(u, v; G + H) \geq r(u, v) \quad \text{minden } \{u, v\} \text{ pontpárra,} \tag{12.9}$$

és létezik legfeljebb γ élű (12.9)-t kielégítő gráf, akkor olyan gráf is létezik, amely egyszerre kielégíti a kívánalmakat.

Az irányított esethez hasonlóan, ennek alapján adott $c : V \to \mathbf{R}_+$ költségfüggvényre a mohó algoritmus segítségével meg tudunk határozni egy minimális költségű növelést, ahol egy új uv él költsége $c(u) + c(v)$. Kiindulunk abból az m vektorból, amelynek minden komponense az $r(u, v)$ igények értékének k maximuma, majd a $c(v)$ szerinti csökkenő sorrendben végighaladva a csúcsokon, egymás után próbáljuk csökkenteni az $m(v)$ pozitív komponenseit amennyivel csak lehet csupán arra ügyelve, a $C(p)$ kontra-polimatroidban maradjunk.

12.4. Az irányított pontösszefüggőség növelése

Megmutatjuk, hogy hasonló állítás érvényes a pontösszefüggőség esetén is. Az irányított gráfok pontösszefüggőségének optimális növelésére vonatkozó 5.4.5. min-max tétel a 8.4.1. tétel speciális esete. Ebből levezethető, hogy egy adott vektor mikor egy p-t fedő digráf befok-vektora. A $Z \subseteq V$ halmazokra jelölje $p^*(Z)$ az olyan független párhalmazok maximális p-összegét, melyek belső halmazai mind Z-ben vannak. A következő eredmények, explicit vagy implicit, Frank és Jordán [32] dolgozatában szerepelnek.

12.4.1. tétel. *Adott $m : V \to \mathbf{Z}_+$ vektorhoz akkor és csak akkor létezik p-t fedő m befok-vektorú digráf, ha*

$$m(Z) \geq p^*(Z) \text{ minden } Z \subseteq V\text{-re.} \tag{12.10}$$

12.4.2. tétel. *A p^* halmazfüggvény teljesen szupermoduláris.*

12.4.3. tétel. *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris párhalmaz függvény. Ekkor a p-t fedő digráfok befok-vektorai egy kontra-polimatroid, nevezetesen $C(p^*)$ egész pontjai.*

Ezek alapján a fokszám-korlátos irányított pontösszefüggés növelési probléma minimális költségű változata is kezelhető pontindukált költségfüggvények esetén.

Végül a linking tulajdonságnak egy olyan megjelenését mutatjuk be, amely úgy tűnik, nem magyarázható azon az alapon hogy a háttérben egy g-polimatroid munkál.

12.4.4. tétel. *Legyen p egy pozitívan keresztező szupermoduláris párhalmaz függvény az S alaphalmazon, legyen továbbá m_{be} és m_{ki} egy befok, illetve egy kifok előírás, melyekre $m_{\mathrm{be}}(V) = m_{\mathrm{ki}}(V)$. Amennyiben létezik egy m_{be} befok vektorú digráf, amely fedi p-t és létezik egy m_{ki} kifok vektorú digráf, amely fedi p-t, úgy létezik olyan p-t fedő digráf is, amelynek a befok vektora m_{be} és a kifok vektora m_{ki}.*

12.5. Konklúziók

A dolgozat egyik célja az volt, hogy viszonylag tömör, magyar nyelvű áttekintést adjon a kombinatorikus optimalizálás egy szeletéről. Az első rész konkrét gráfoptimalizálási feladatokat mutatott be kezdve olyan klasszikusnak számító kérdéskörökön, mint a páros gráf költséges párosításának kiszámítása, illetve különféle út, folyam és áram problémák, majd olyan modernebb témákkal folytatva, mint az egyirányú vágások lefogása, fa és fenyő pakolások, gráfirányítási és növelési problémák.

A második rész olyan absztraktabb eszközöket mutatott be, melyek megvilágítják, hogy az első rész eredményeinek valójában mi is áll a hátterében. A poliéderes kombinatorika és a szubmoduláris technika segítségével megérthettük, hogy látszólag távolfekvő tételek közös tőről fakadnak. Ennek egyik legszélsőségesebb példája volt, hogy Győri Ervin nehéz tétele függőlegesen konvex poliominók minimális fedéséről és az irányított összefüggőség minimális növelésére vonatkozó tétel egymás rokonai.

A dolgozatban nem esett szó a kombinatorikus optimalizálás egy másik, nem kevésbé jelentős ágáról, amelyben a paritás játszik valamiféle szerepet. A párosítások, T-kötések, diszjunkt út feladatok fentiekhez hasonló jellegű összefoglaló áttekintése a jövő szép célkitűzése lehet.

Irodalom

[1] J. Bang-Jensen and B. Jackson, Augmenting hypergraphs by edges of size two, in: *Connectivity Augmentation of Networks: Structures and Algorithms, Mathematical Programming,* (ed. A. Frank), Ser. B, Vol. 84, No. 3 (1999), pp. 467–481.

[2] J. Becker and A. Frank, *A quick proof for the matroidal structure of a source location problem,* EGRES Quick-proof series, 2008-01.

[3] A. Benczúr and A. Frank, Covering symmetric supermodular functions by graphs, in: *Connectivity Augmentation of Networks: Structures and Algorithms, Mathematical Programming,* (ed. A. Frank), Ser. B, Vol. 84, No. 3 (1999), pp. 483–503.

[4] W. J. Cook, Operations that preserve total dual integrality, *Operations Research Letters,* **2** (1983), 31–35.

[5] W. J. Cook, J. Fonlupt and A. Schrijver, An integer analogue of Caratheodory's theorem, *J. Combinatorial Theory,* Ser B., **40** (1986), 63–70.

[6] J. Edmonds, Minimum partition of a matroid into independent sets, *J. Res. Nat. Bur. Standards,* **B69** (1965), 67–72.

[7] J. Edmonds and D. R. Fulkerson, Transversal and matroid partition, *Journal of Research of the National Bureau of Standards,* **B69** (1965), 147–153.

[8] J. Edmonds, Optimum branchings, *J. Res. Nat. Bur. Standards,* **B71** (1967), 233–240.

[9] J. Edmonds, Submodular Functions, Matroids and Certain Polyhedra, in: *Combinatorial Structures and their Applications* (R. Guy, H. Hanani, N. Sauer and J. Schönheim, eds.), Gordon and Breach, New York (1970), pp. 69–87.

[10] J. Edmonds, Matroids and the greedy algorithm, *Math. Programming,* **1** (1971), 127–136.

[11] J. Edmonds, Edge-disjoint branchings, in: *Combinatorial Algorithms* (B. Rustin, ed.), Acad. Press, New York, (1973), 91–96.

[12] J. Edmonds, Matroid intersection, *Annals of Discrete Math.*, **4** (1979), 39–49.

[13] J. Edmonds and D. R. Fulkerson, Transversal and matroid partition, *Journal of Research of the National Bureau of Standards,* **B69** (1965), 147–153.

[14] J. Edmonds and R. Giles, A min-max relation for submodular functions on graphs, *Annals of Discrete Mathematics,* **1** (1977), 185–204.

[15] J. Edmonds, Matroid intersection, *Annals of Discrete Math.*, **4** (1979), 39–49.

[16] J. Edmonds and R. Giles, Total dual integrality of linear inequality systems, in: *Progress in Combinatorial Optimization* (ed. W. R. Pulleyblank), Academic Press (1984), pp. 117–129.

[17] Egerváry J., Matrixok kombinatorius tulajdonságairól, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **38** (1931), 16–28.

[18] J. Folkman and D. R. Fulkerson, Edge-colorings in bipartite graphs, in: *Combinatorial Mathematics and its Applications* (Proc. Conference Chapel Hill, North Carolina, 1967). The University of North Carolina Press, 1969 (R. C. Bose, T. A. Dowling, eds.), 561–577.

[19] A. Frank, On disjoint trees and arborescences, in: *Algebraic Methods in Graph Theory,* Colloquia Mathematica Soc. J. Bolyai, **25** (1978), 159–169. North-Holland.

[20] A. Frank, Kernel systems of directed graphs, *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged),* **41, 1–2** (1979), 63–76.

[21] A. Frank, On the orientation of graphs, *J. Combinatorial Theory,* Ser. B., Vol. 28, No. 3 (1980), 251–261.

[22] A. Frank, Generalized polymatroids, in: *Finite and infinite sets* (Eger 1981), Colloquia Mathematica Soc. J. Bolyai, **37**, 285–294. North-Holland.

[23] A. Frank, A weighted matroid intersection algorithm, *J. Algorithms,* **2** (1981), 328–336.

[24] A. Frank, An algorithm for submodular functions on graphs, *Annals of Discrete Mathematics,* **16** (1982), 97–120.

[25] A. Frank, Finding feasible vectors of Edmonds-Giles polyhedra, *J. Combinatorial Theory,* Ser. B, Vol. 36, No. 4 (1984), 221–239.

[26] A. Frank and É. Tardos, Generalized polymatroids and submodular flows, *Mathematical Programming,* Ser. B., **42** (1988), 489–563.

[27] A. Frank and É. Tardos, An application of submodular flows, *Linear Algebra and its Applications,* **114/115** (1989), 329–348.

[28] A. Frank, Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements, *SIAM J. on Discrete Mathematics* (1992 February), Vol. 5, No. 1., pp. 22–53.

[29] A. Frank, Orientations of Graphs and Submodular Flows, *Congressus Numerantium,* **113** (1996) (A. J. W. Hilton, ed.), pp. 111–142.

[30] A. Frank, Connectivity augmentation problems in network design, in: *Mathematical Programming: State of the Art,* 1994, (J. R. Birge and K. G. Murty, eds.), The University of Michigan, pp. 34–63.

[31] Frank A., A Magyar Módszer és általánosításai, *Szigma,* 2002, XXXIII, 1–2, pp. 13–44.

[32] A. Frank and T. Jordán, Minimal edge-coverings of pairs of sets, *J. Combinatorial Theory,* Ser. B., Vol. 65, No. 1 (1995, September), pp. 73–110.

[33] A. Frank, T. Király and M. Kriesell, On decomposing a hypergraph into k connected sub-hypergraphs, in: *Submodularity* (guest editor S. Fujishige), Discrete Applied Mathematics, Vol. 131, Issue 2. (September 2003), pp. 373–383.

[34] A. Frank and É. Tardos, Matroids from crossing families, in: *Finite and infinite sets* (Eger, 1981), Colloquia Mathematica Soc. J. Bolyai, **37**, 295–304. North-Holland.

[35] Frank A., Összefüggések a kombinatorikus optimalizálásban: I. Optimalizálás gráfokon, *Matematikai Lapok,* Vol. 1 (2008), 20–76.

[36] A. Frank, Rooted k-connections in digraphs, *Discrete Applied Mathematics* (2008) to appear.

[37] S. Fujishige, Structures of polyhedra determined by submodular functions on crossing families, *Math. Programming,* **29** (1984), 125–141.

[38] S. Fujishige, *Submodular functions and optimization,* (Second Edition) Annals of Discrete Mathematics, Vol. 58, Elsevier (2005).

[39] E. Győri, A minimax theorem on intervals, *J. Combinatorial Theory,* Ser. B, **37** (1984), 1–9.

[40] A. J. Hoffman and J. B. Kruskal, Jr., *Integral boundary points of convex polyhedra,* Linear Inequalities and Related Systems, Annals of Mathematics Study, **38** (1956), 223–346, Princeton University Press.

[41] A. J. Hoffman, Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combintorial analysis, *Proceedings of the Symposia of Applied Mathematics,* **10** (1960), 113–127.

[42] A. J. Hoffman, A generalization of max-flow min-cut, *Math. Programming,* **6** (1974), 352–359.

[43] T. Jordán and Z. Szigeti, Detachment preserving local edge-connectivity of graphs, *SIAM J. Discrete Mathematics,* Vol. 17, No. 1. (2003), pp. 72–87.

[44] T. Király, Covering symmetric supermodular functions by uniform hypergraphs, *J. Combinatorial Theory,* Ser. B, **91** (2004), 185–202.

[45] Kőnig D., Graphok és matrixok, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **38** (1931), 116–119.

[46] G. Laman, On graphs and rigidity in plane skeletal structures, *J. Engineering Math.,* **4** (1970), 331–340.

[47] E. L. Lawler, *Kombinatorikus Optimalizálás: hálózatok és matroidok,* Műszaki Kiadó, 1982. (*Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, 1976).

[48] L. Lovász, Jelentés az 1968. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről, *Matematikai Lapok,* **20** (1969) pp. 145–171. 11. feladat, Lovász megoldása 168–169 oldal.

[49] L. Lovász, A generalization of Kőnig's theorem, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.,* **21** (1970), 443–446.

[50] L. Lovász, Flats in matroids and geometric graphs, in: *Combinatorial Surveys – Proceedings of the Sixth British Combinatorial Conference* (London-Egham, 1977, P. J. Cameron, ed.) Academic Press, London, 1977, pp. 45–86.

[51] L. Lovász and Yemini, On generic rigidity in the plane, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods,* **3** (1982), 1, 91–98.

[52] L. Lovász, Submodular functions and convexity, in: *Mathematical programming – The state of the art* (eds. A. Bachem, M. Grötschel and B. Korte), Springer 1983, 235–257.

[53] W. Mader, A reduction method for edge-connectivity in graphs, *Ann. Discrete Math.,* **3** (1978), 145–164.

[54] K. Murota, Discrete Convex Analysis, *SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications,* 2003.

[55] H. Nagamochi, T. Ishii and H. Ito, Minimum cost source location problem with vertex-connectivity requirements in digraphs, *Information Processing Letters,* **80** (2001), 287–294.

[56] R. Rado, A theorem on independence relations, *Quarterly J. of Math. Oxford,* **13** (1942), 189–222.

[57] Z. Szigeti, Hypergraph connectivity augmentation, in: *Connectivity Augmentation of Networks: Structures and Algorithms, Mathematical Programming,* (ed. A. Frank), Ser. B, **84**, No. 3 (1999), pp. 519–527.

[58] D. H. Younger, Maximum families of disjoint directed cut sets, in: *Recent Progress in Combinatorics* (ed. W. T. Tutte), Proceedings of the Third Waterloo Conference on Combinatorics, May 1968, Academic Press (1969), pp. 329–333.

Frank András

Operációkutatási Tanszék és
MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Pázmány P. s. 1/c
Budapest H-1117

e-mail: frank@cs.elte.hu.

TÁRSULATI ÉLET – 2007

Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2007. évi érmet **Szűcs András**nak ítélte oda.

Indoklás: Fields-érmekkel gazdagon díjazott területen, a differenciáltopológiában ért el jelentős eredményeket. Munkásságában a téma meghatározó egyéniségeinek vizsgálatait fejlesztette tovább. Ezen az úton sokáig egyedül haladt, de felfedezéseinek hatására is, az általa képviselt „globális szingularitáselmélet" újabban világszerte pezsgésnek indult. Magyarországon kívül Angliában, Japánban, Brazíliában, Oroszországban kutatják a témát. Ezek az iskolák Szűcs András munkásságát úttörőként idézik, és konferenciáikra rendszeresen kérik fel meghívott előadónak.

A hazai matematikai kutatásra gyakorolt hatása egyedülálló. Több évtizedes oktató és utánpótlás-nevelő munkájával olyan szerkezeti változást ért el, amelynek révén a hazai kutatás szakterületi megoszlása lényegesen közelebb került a világ élvonalbeli matematikai központjaihoz.

Iskolát teremtett a matematika olyan területein, amelyek, bár a modern matematikában központi szerepet játszanak, megjelenése előtt hiányoztak a hazai kutatásokból. 14 szemeszteres tananyagán generációk nevelkedtek. Tanítványai nemzetközi rangra tettek szert a globális szingularitáselmélet mellett az utóbbi két évtizedben rendkívüli eredményeket felmutató alacsony dimenziós topológiában is (Stipsicz András és Szabó Zoltán). Hatása megkönnyítette a differenciáltopológián túl, a hazai többdimenziós komplex függvénytani és algebrai geometriai kutatások kialakulását – ezt hangsúlyozzák Kollár János és Lempert László, akik Szűcs András diákköri előadásait és a vele való beszélgetéseket pályakezdésük jelentős, a későbbi munkájukra is nagy hatást gyakorló befolyásai között tartják számon.

Programjának eredeti célja beágyazások és immerziók (rangtartó leképezések) kobordizmuscsoportjainak kiszámítása volt. Rendkívül fontos észrevétele, hogy ehhez egy általánosabb problémát, a korlátozott szingularitásokat megengedő leképezések osztályozását is meg kell oldani, ugyancsak kobordizmus erejéig. A szinguláris leképezések kobordizmuselméletét egymaga fejlesztette ki az 1970-es évek végétől kezdődően. Két évtizedes munkával kidolgozta a különböző szingularitási típusok klasszifikáló tereinek konstrukciós technikáját. Ebből az adott szingularitástípusok kobordizmuscsoportjai elvben kiszámolhatók, mivel megegyeznek ezeknek a Szűcs által bevezetett általánosított Thom-tereknek bizonyos homotópiacsoportjaival. E programot követve Szűcs $k > n/3$-ra lényegében meghatározta az

n-dimenziós sokaságok $\mathbb{R}^{n+k}$-ba való beágyazásainak és immerzióinak kobordizmuscsoportjait. Egyéb speciális eseteket megoldó cikkei után tetszőleges módon korlátozott szingularitásokat vizsgált tanítványával, Rimányi Richárddal. Stabil szingularitások egy τ családjához megkonstruáltak két végtelen dimenziós teret és köztük egy olyan $F : Y \to X$ leképezést, amelyből minden τ-leképezés indukálható. Itt X a Szűcs-féle általánosított Thom-tér. Rimányi ezután felismerte, hogy Szűcs terei hatékony módszert adnak a Thom-polinomok kiszámítására.

A Szűcs-féle tereknek Kazarian külön fejezetet szentel, melyben azt írja, hogy a különféle szingularitások klasszifikáló tereinek legfontosabb közös tulajdonsága az általa „általánosított Pontryagin–Thom–Szűcs-konstrukciónak" nevezett, a szingularitás szimmetriacsoportjával indexezett felbontás. Ez a felbontás Szűcs András egyik legfontosabb felfedezése. Ezután egy általános képet vázol a szingularitáselméleti osztályozásról, majd a Szűcs-féle konstrukciók messzemenő következményeire mutat rá, köztük a Thom-polinomok hatékony kiszámolására (ezt számítógépre is vitte). A Szűcs-konstrukciók mélyebb kiaknázása révén univerzális formulákat talált. Ez az algebrai geometriával való összevetés kiemeli Szűcs módszereinek mélységét. Kazarian arról is beszámol, hogy ő maga azután tudott e téren jelentős eredményeket elérni, miután Szűcs András 2000-ben az oberwolfachi szingularitáselméleti konferencián személyesen elmagyarázta neki az elméletét. Ezután összekapcsolta a moszkvai szingularitáselméleti iskola eredményeivel és ezzel vált a globális szingularitáselmélet elsőrangú képviselőjévé.

Említésre méltó két nem régi, T. Ekholm-mal közös, a kobordizmuselmélettől független dolgozata. Ezek egyikében a homotópikus gömböknek (egy fix n-dimenziós gömbbel homeomorf differenciálható sokaságoknak) a diffeomorfizmusosztályait vizsgálják, és egyebek között egy, a differenciáltopológiában sok oldalról vizsgált konstrukciónak (Brieskorn-egyenletek) a mélyebb jelentését magyarázzák meg. Ez az eredmény egy korábbi közös dolgozatukra épít, amelynek nyomán ma már egy „Ekholm–Szűcs-típusú formulát" is ismer az irodalom. Szűcs András már nagyon rég megérdemelte volna a Szele Tibor-emlékérmet.

Beke Manó-emlékdíj

A 2007. évi Beke Manó-emlékdíj bizottság határozata alapján a következők részesültek a díjban: **Darvasné Bodon Anna, Hámori Veronika, Lajkó Károly, Lányi Veronika, Marczis György, Sólyom Istvánné, Tarnai Magdolna.**

Indoklás: *Darvasné Bodon Anna* 1967-ben végzett az ELTE TTK matematika–fizika szakán. Friss diplomájával a Zrínyi Ilona Gimnáziumban kezdett tanítani, és 10 éven át, az iskola megszűnéséig, itt tanított, abban a gimnáziumban, amelynek korábban maga is diákja volt. Igényes, színvonalas szakmai és módszertani felkészültségével, jó pedagógiai érzékével vissza tudta adni tanítványainak azt, amit értelmiségivé nevelődésében az alma matertől, kollégáivá lett tanáraitól kapott. Rövid kitérők után a II. Rákóczi Ferenc Fővárosi Gyakorló Közgazdasági Középiskolába került, ahol rövid időn belül a matematika és a természettudományi munkaközösség vezetőjévé választották. Ezt a feladatot 20 éven át látta el kollegái nagy megelégedésére. Törődött a fiatal tanárok segítésével, a matematika tanításának országos kérdéseiben hallatta szavát, aktívan részt vett a főváros matematikatanárainak szakmai életében. Sikeres bemutató órákat tartott, szakmai továbbképzéseken vett részt. Szaktanári munkáját a diákok differenciált fejlesztésére való törekvés jellemzi. Megértő, de szigorú következetességgel foglalkozik a matematikából gyengén teljesítő tanulókkal, és komoly támogatást kapnak tőle a tárgyunkból tehetséget mutató tanítványai. Közülük többen voltak az OKTV döntőjének résztvevői, a sok éves pálya során mérnökök, közgazdászok, számítógépes szakemberek felsőfokú tanulmányait alapozta meg a középiskolai matematika és fizika óráin. A matematika tanítását az emberré formálás fontos eszközének is tekinti. Szívesen volt osztályfőnök, pályája során nyolc osztályt vezetett végig. A felsőoktatásban is tevékenykedett, a Pénzügyi és Számviteli Főiskolán 10 éven át tartott előkészítő tanfolyamokat, felvételiztetett, vezetett analízis gyakorlatot. Bodon Anna tanári pályájának kulcsszava a szeretet. Szereti a matematikát, szereti az embereket, a diákokat, a tanárokat és a szülőket egyaránt. Ezt a szeretettel, szakértelemmel és áldozatkészséggel teli pályát jutalmazzuk most a Beke Manó-emlékdíjjal.

Hámori Veronika tanári pályáját a Bolyai János Híradástechnikai Szakközépiskolában kezdte 1972-ben. Sokoldalúan helytállt iskolájában: osztályfőnök, a matematika, illetve az osztályfőnöki munkaközösség vezetője, később igazgatóhelyettes is volt. 1985 óta a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium vezető tanára. Célja, hogy minden egyes tanítványát képessége határáig juttasson el. Egyaránt fontosnak tartja, hogy matematikából a legtehetségesebbek jól szerepeljenek az Arany Dániel-versenyen és az OKTV-n; a szakirányban továbbtanulók jól és zökkenőmentesen megállják helyüket az egyetemen; illetve a matematikával tovább már nem foglalkozókkal is elsajátíttassa a logikus gondolkodást, az érvrendszer felépítését. Mindamellett, hogy ezen feladatoknak maradéktalanul eleget tesz, országos versenybizottságok munkájában is tevékenykedik: 17 éve az Arany Dániel, 12 éve az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny feladatainak kitűzésében és a megoldások javításában vesz részt. A Fazekasban kezdettől osztályfőnök is volt, évekig vezette az osztályfőnöki munkaközösséget, két évig igazgatóhelyettesként dolgozott, hét éve az iskola igazgatója. Toleráns gondolkozása, viselkedése nyugodt, kiegyensúlyozott munkahelyi légkört teremtett. Vezető tanárként számtalan előadást és bemutató órát tartott továbbképzéseken. Mindig fontosnak tartotta egy-egy téma didaktikai feldolgozását. 1988-ban elvégezte az ELTE TTK által szervezett intenzív tanártovábbképzését, 2002-ben a BME Közoktatási Vezető szakát. A világbanki program keretében jelent meg kézikönyve az osztályfőnököknek, szaktanároknak pedig a komplex számok és a kombinatorika tanítását feldolgozó szakköri füzete. 1980-ban Kiváló Munkáért kitüntetést, 2001-ben a Graphisoft Tehetséggondozásért díját, 2004-ben Fővárosi Emléklapot kapott. Hámori Veronikát kimagasló szakmai életműve mellett hivatástudatáért, felelősségérzetéért is megbecsülik kollégái és tanítványai. Magas fokú szakmai igényessége, a tökéletességre való törekvése, a tanári munka iránti elkötelezettsége, gyermekközpontú szemlélete és tanári gyakorlata, kollegialitása, segítőkészsége mind-mind hivatástudatának fényes tanújele.

Lajkó Károly 1966-ban kapta meg a KLTE TTK-n matematika–fizika szakos középiskolai tanári diplomáját. 1969–2006 között a KLTE, illetve jogutódja a DE Matematikai Intézetében az analízis tanszék oktatója volt. Végigjárta az egyes fokozatokat: tanársegédi, adjunktusi, majd egyetemi docensi beosztásokban dolgozott. Tanított, illetve ma is tanít a nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskolán. 1969-ben egyetemi doktor, 1979-ben a matematikai tudományok kandidátusa, 2001-ben habilitált a DE-n. Munkássága sokrétű, a magas színvonalú tudományos munka mellett kiemelkedő oktatói, szervezői és irányító munkát végez. Ismert és megbecsült szakmai közéleti és közösségi ember, aki önzetlenül nagyon sokat tett a tehetséggondozásért, a tanulói versenyekért, a tanárképzésért, a tanártovábbképzésért, a szakmódszertani tudományos munka feltételeinek a megteremtéséért és megbecsülésééért, a szakmódszertani PhD megvalósításáért, a hozzá kapcsolódó publikációs lehetőség biztosításáért. Tudományos munkája a függvényegyenletek elmélete, és elsősorban ennek a valószínűség-számításban való alkalmazása. Több mint 70 tudományos közleménye jelent meg rangos folyóiratokban és konferenciakiadványokban. A függvényegyenletek témakörben jegyzetet készített az egyetemi hallgatók és a tehetséges középiskolás diákok számára. Jelentős részt vállalt és vállal ma is a matematika oktatásának megjavítása érdekében, mind az egyetemi, illetve főiskolai, mind a középiskolai szinten, illetve a matematikatanárok továbbképzésében. Számos előadást tartott a „Tanítsuk eredményesebben a matematikát" akkreditált szakmódszertani továbbképzésen. A matematika szakvizsgára való felkészítésében is aktív szerepet játszik. Hat évig volt a vezetője a DE Matematikai Intézete tehetséggondozó programjának. Az ő pályázata segítségével sikerült újra indítani a Hajdú-Bihar megyei középiskolák megyei matematika versenyét, amelyen azóta is évente kb. 1500 középiskolai tanuló indul. Kezdeményező szerepe volt abban, hogy találkozókat szervezzen az egyetemek és főiskolák szakemberei számára, amelyeken a matematika oktatásának aktuális problémáit vitatták meg. Nagy szerepe volt abban is, hogy a DE Matematikai Intézetének jó kapcsolatai alakultak ki a határon túli (ungvári, kassai, kolozsvári) egyetemek matematikai és informatikai egységeivel és magyar oktatóival. Elősegítette a Nemzetközi Magyar Matematikai Verseny debreceni megrendezését, a határon túli magyar diákoknak a debreceni Téli Iskolán való részvételét. A XXVIII. OTDK rendezvényeire meghívást kaptak a határon túli egyetemek tanárai és egyetemi hallgatói. Tagja volt a BJMT választmányának, két évig az elnökségnek. Számos kitüntetésben részesült, az egyetemi hallgatók szavazatai alapján két alkalommal is elnyerte az év oktatója címet. Lajkó Károly jelentős hatású pedagógus, aktív közéleti személyiség, aki nemzetközileg elismert tudományos tevékenysége mellett nagyon sokat tett a matematika oktatásának javításáért, társadalmi elismeréséért és a tanárokért.

Lányi Veronika a pécsi Nagy Lajos Gimnázium fizika tagozatos osztályának tanulójaként 1982-ben érettségizett. Ezt követően a szegedi József Attila Tudományegyetem Természettudományi Karán tanult, matematika–fizika szakos tanári diplomáját 1987-ben kapta. Egyetemista éveinek szép sikere az OTDK-n elnyert különdíj. Két gyermeke születése között, 1989-től 1991-ig a pécsi Leőwey Klára Gimnáziumban tanított, majd 1994 óta folyamatosan a pécsi Koch Valéria Középiskola, Általános Iskola, Óvoda és Kollégiumban (volt Magyar–Német Nyelvű Iskolaközpont) dolgozik. Matematika-fizika szakos középiskolai tanár, 1999–2003-ig a reál munkaközösség vezetője. Rendszeresen továbbképzi magát, 2000. ősztől részt vesz a „Zalai Matematikai Tehetségekért" Alapítvány által kezdeményezett matematikai tehetséggondozó programban. Keszthelyen és Fonyódon több alkalommal tartott a Dunántúlról érkezett tehetséges diákoknak matematikafoglalkozásokat. Dolgozik a Veszprémi Egyetem Műszaki Informatikai Kar Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskolájában. Révkomáromban előadást tartott a Nagy Károly-napok keretén belül. Az 1994/1995. tanévben csillagászatot, pontosabban csillagfejlődést, kozmológiát tanított az akkori nyolcadikosoknak. Ennek eredményeképpen egyik tanítványa a MCSE és a MANT által meghirdetett csillagászati pályázaton második helyezést nyert, és egy hetet tölthetett a NASA egyik oktatótáborában. Tanulói kezdeményezésre 2001-ben 24 órás „matematikai maraton"-t tartott az iskolában, tornacsarnoki alvással, mely akcióról a televízió is beszámolt. Iskolájában szakköröket tart, évfolyamszinten. Diákjai eredményesen szerepelnek nem csupán a helyi, de az országos versenyeken is. Diákjai és kollégái is egyaránt szeretik, hiszen mind emberi, mind szakmai szempontból kiváló.

Marczis György tanulmányait Szegeden a JATE matematika–fizika szakán végezte, 1981-ben. Ezután Gyulára került, ahol előbb 4 évig a Munkácsy Mihály Középiskolában, majd 2 évig a Mohácsy Mátyás Szakközépiskolában tanította mindkét szakját. 1986-tól tanít az Erkel Ferenc Gimnáziumban, itt a matematika munkaközösség vezetője. 1996-ban a Békés Megyei Humán Fejlesztési és Információs Központ középiskolai matematikai szaktanácsadója lett. Minden munkahelyén, de a megye iskoláiban is a lehetőségekhez mérten nagy figyelmet szentelt a tehetséges tanulók felfedezésére, tehetségük gondozására. Az iskola végzett tehetséges diákjait előadások tartására hívta vissza – az új eredmények megismerése és példaadás céljából is. Iskolai és városi szakköröket vezetett, ismeretterjesztő előadásokat tartott (TIT). Új programot kezdeményezett, a „Természettudományos napok" előadássorozatát. Ennek keretén belül már több mint 6 éve Gyulára jönnek országosan, esetenként világszerte ismert tudósok, egyetemi tanárok. Szaktanácsadói munkája során ezeket az előadásokat megyei szinten is látogatottá szervezte, más iskolai színhelyeket is választva. 1996-ban lett a Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozatának titkára. A kétszintű érettségi helyi működtetésében kiemelkedő szerepet vállalt. Három alkalommal vezetett 30 órás felkészítő tanfolyamot a megye pedagógusainak. Szakmai napot szervezett a kétszintű érettségi szerkezetéről 2004-ben. Az emelt szintű matematika érettségi dolgozatok javításának Békés megyei vezetője azóta is, és rendszeresen érettségi tantárgyi bizottsági tag. Az Uhrin János szaktanácsadó által több mint 10 évig működtetett Békés Megyei Matematika Tesztversenyt kiszélesítette. Kezdeményezésére ez a verseny felvette a nemrég elhunyt kiváló pedagógus, Hajnal Imre nevét. A verseny szakmai programmal bővült. Az írásbeli munka és a dolgozatok javítása alatt a kísérő tanárok és érdeklődő pedagógusok előadásokat hallgathatnak a szakma legkiválóbbjaitól. Előadásokat tartott Komáromban a Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozón. 2006-ban a Varga Tamás Módszertani Napok rendezvényén „Az emelt szintű matematika írásbelik javításának Békés megyei tapasztalatai" címmel tartott előadást. Az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola rendszeres előadója Kecskeméten. Évek óta szervezi a Szőkefalvi-Nagy Gyula-emlékversenyt Békés megyében. Publikációi jelentek meg a Matematika Tanításában, a KöMaL-ban 2006-ban és 2007-ben. Az Új Pedagógiai Szemle 2002-ben közölte cikkét „A matematika tanulása örömteli legyen a gyerek számára" címmel. Elhivatottságát a matematika iránt az is jelzi, hogy saját maga alapítványt hozott létre iskolájában, a Heuréka Alapítványt, így támogatni tudja azt a diákot, aki „Az év legjobb matematikusa". Felkészültsége, aktív szervező munkája, emberi kvalitásai, kollégái, tanítványai megbecsülése méltóvá teszik a Beke Manó-díjra.

Sólyom Istvánné a veszprémi Kossuth Lajos Általános Iskolában tanít több évtizede. 10 éve emelt szintű matematika osztályokban végez nagyon magas színvonalú oktató- és nevelőmunkát. Nagy hangsúlyt fektet a tehetségek felkarolására és ösztönzi diákjait a versenyeken való részvételre. Tanítványai rendszeresen indulnak városi, megyei és országos matematikaversenyeken, ahol minden évben az élmezőnyben végeznek. 2006-ban a 3. évfolyamos csapata a Zrínyi Ilona-matematikaversenyen országos 1. helyezést ért el. A veszprémi Kossuth Lajos Általános Iskola több országos verseny (Varga Tamás, Kalmár László, Alapműveleti, Zrínyi) megyei fordulójának lebonyolítója, amelyben Sólyom Istvánné is nagyon tevékenyen vesz részt. Jó pedagógiai érzékre vall, hogy a gyerekekkel mindig szeretetteljes légkört alakít ki, a szülőket rendszeresen tájékoztatja gyermekük előmeneteléről. Hatalmas energiát fektet a gyengébb képességű tanulók felzárkóztatásába, önbizalmuk növelésébe. Segíti a pályakezdő pedagógusok beilleszkedését, több éve az alsós munkaközösség vezetője. Jelentős feladatot vállalt a helyi tanterv kidolgozásában, a minőségirányítási program elkészítésében. Érdeklődése a kompetenciamérések felé is irányul; ezzel kapcsolatban végzett el a múlt évben egy továbbképzést, amelynek ismereteit munkájában, mint munkaközösség-vezető is hasznosítja. Több évtizedes kiemelkedő színvonalú munkája alapján kapja a Beke Manó-emlékdíjat.

Tarnai Magdolna az elmúlt évtizedek alatt végzett áldozatos munkájával nagyban gazdagította Szeged város és Csongrád megye matematikaoktatását. Nagy bátorságra és szilárd meggyőződésre vallott, amikor az 1986-ban Szeged egyik új városrészében épült általános iskolát matematika és francia tagozattal indították az Ő hathatós közreműködésével. Az emelt szintű matematikaoktatás személyi és tárgyi feltételeinek megteremtésébe rengeteg energiát fektetett, és azóta is szívén viseli ezen osztályok sorsát. A mai egyre nehezedő körülmények, az óraszámok szorító kényszerében már-már bűvészmutatványnak számító cselekedetet kíván egy igazgatóhelyettestől a tagozat létének fenntartása. Igazgatóhelyettesként ezt évről-évre szigorú következetességgel igyekszik tanítványai, kollégái és iskolája számára biztosítani. Szakmai lelkesedését és elszántságát az is kellően igazolja, hogy a Makkosházi Általános Iskola indulásával szinte egy időben útjára indítottak egy azóta is nagysikerű matematikaversenyt, amelynek nemcsak bábája, hanem azóta első számú gondviselője is a mai napig. Az Ő és munkaközössége szervezésében zajló verseny méltón reprezentálja iskoláját, hiszen országosan is talán egyedülálló módon egy időben versenyeznek a megye felső tagozatos diákjai (5–8. o.), de külön feladatsorral az általános tantervűek, és külön feladatsorral a tagozatosok. Így természetesen külön rangsorolt eredmények is születnek, amiket ily módon nyolc kategóriában hirdetnek ki évente. Mérhetetlen gondossággal teremti meg a nyolc kategória győzteseinek és helyezettjeinek az eredményekhez méltó jutalmazás tárgyait. Impozáns vándorkupá(ka)t honosítottak meg minden kategóriának. Sok éve fáradozik azon, hogy a Csongrád megyeiek mellett határon túli résztvevői is legyenek a „Makkosházi Matematikaversenynek". Nemes igyekezetének is köszönhető, hogy immár törzsvendégek az aradi magyar gyerekek is a versenyen. Saját tanítványai is többször szerepeltek eredményesen az országos matematikaversenyeken, többen közülük a döntőbe is bejutottak. Tanóráit a gyermekszeretet és a szakmai biztonság, az alapos módszertani felkészültség és könnyed változatosság jellemzi. Egyaránt hangsúlyt helyez a lassabban haladókra és a tehetségesekre. Sok energiát fordít az arányos terhelésre. Számos tanítványa jól helytáll a hatosztályos gimnáziumokban is és a nyolcadik osztály elvégzése után a négy évfolyamos középiskolákban is. Tarnai Magdolna széleskörű iskolai tevékenysége mellett a Csongrád Megyei Matematika-, Fizikatanárok Szegedi Alkotóműhelyének is egyik legaktívabb tagja. Az elmúlt évtizedek városi és megyei szakmai rendezvényeinek szervezésében, eredményes lebonyolításában rendszeresen döntő szerepet vállalt. Szakmai munkáját szűkebb és tágabb környezetében elismerik kollégái, sokéves fáradhatatlan munkájával rászolgált a Beke Manó-emlékdíjra.

Grünwald Géza-emlékérem

A 2007. évi bizottság határozata alapján az emlékéremben a következők részesülnek: **Barczy Mátyás, Pap Gyula, Röst Gergely** és **Szabó Jácint.**

Indoklás: *Barczy Mátyás* 2001-ben szerzett kitüntetéses matematikus diplomát a Debreceni Egyetemen, elnyerve a DE TTK Emlékérmét is. 2006 őszén summa cum laude doktorált a DE Informatikai Karán. Dr. Pap Gyula vezetése mellett írta *Some questions of probability theory on special topological groups* című doktori értekezését. 2001 szeptemberétől három évig a DE alkalmazott matematika és valószínűség-számítás tanszékén volt doktori ösztöndíjas, 2005 szeptemberétől egy évig számítástechnikai munkatársa a tanszéknek; ezután egyetemi tanársegéddé, majd 2007. szeptember 1-től egyetemi adjunktussá nevezték ki. Szakmai munkássága három fő irányt foglal magába.

Egyik a funkcionálanalízishez kapcsolódik: lokális automorfizmusok és megőrzési problémák vizsgálata. Leírta egy Hilbert-tér korlátos, lineáris önadjungált operátoraiból álló Jordan-algebrának az összes olyan bijektív lineáris leképezését, melyek megőriznek egy rögzített momentumot vagy a szórást. Megmutatta, hogy egy Hilbert-tér állapotainak minden affin 1-lokális, illetve nem-affin 2-lokális automorfizmusa automorfizmus.

Második témája lokálisan kompakt topológikus csoportokon, Lie-csoportokon értelmezett valószínűségi mértékek analitikus és algebrai tulajdonságainak vizsgálata. Ilyen struktúrákon értelmezett valószínűségi mértékekből álló háromszögrendszerekre vonatkozó (centrális) határeloszlás-tételek felállítása. Heisenberg-csoporton értelmezett Gauss-mértékek Fourier-transzformáltjára a Schrödinger-reprezentációban explicit formulát adott. Ezt felhasználva szükséges és elegendő feltételt származtatott arra vonatkozóan, hogy mikor lesz két, a Heisenberg-csoporton értelmezett Gauss-mérték korevolúciója Gauss-mérték. Speciális lokálisan kompakt Abel-csoportokon (tórusz, p-adikus egészek csoportja, p-adikus szolenoid) szükséges és elegendő feltételeket adott háromszög-rendszerekre vonatkozó (centrális) határeloszlás-tételek fennállására. Megmutatta továbbá, hogy az affin-csoporton egy Gauss-mérték egyértelműen ágyazható be egy Gauss-konvolúciós félcsoportba.

Harmadik, legújabb témája Markov-folyamatokra vonatkozó hidak konstrukciója és vizsgálata, speciálisan Wiener-hidak, Bessel-hidak, Ornstein–Uhlenbeck-hidak tulajdonságainak és Markov-folyamatok radiális részének tanulmányozása. Megmutatta, hogy egy többdimenziós Ornstein–Uhlenbeck-folyamat esetén a radiális rész képzésének és a hídképzésnek a művelete felcserélhető, ha nulla végpontú hidakat tekintünk.

Eddig hat megjelent és egy közlésre elfogadott referált folyóiratcikke van. Megjelent dolgozataira eddig 7 független hivatkozás történt. Gyakran szerepel nemzetközi konferenciákon és vesz részt külföldi tanulmányutakon. A kutatómunkán kívül az oktatói munkában is jeleskedik. Ez irányú munkájáról ad számot az a négy (részben) Pap Gyulával közösen készített példatár, melyek a DE-en oktatott valószínűség-számítás, sztochasztikus folyamatok és pénzügyi matematika tárgyak gyakorlatainak anyagát ölelik fel.

Pap Gyula Ph.D. fokozatát summa cum laude minősítéssel nyerte el 2007-ben. Jelenleg az MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport tudományos segédmunkatársa. Kutatási eredményei döntően a párosítások és útpakolások területére esnek. Munkájának összefoglalását adja nemrégiben megvédett *A constructive approach to matching and its generalizations* c. doktori értekezése. A párosításelmélet klasszikus eredményeihez nyúl vissza (Tutte, Edmonds–Gallai, Lovász matroid-parity, Mader A-utak). Meglepő, hogy egy ennyire kidolgozott területen alapvető újdonságokkal tud szolgálni.

Egyik legfontosabb felfedezése egy új algoritmikus megközelítés. Pár éve Cunningham és Geelen bevezették az útpárosítás fogalmát, amely egy gráfban a két ponthalmaz közötti k diszjunkt út problémának és a maximális párosítás problémának közös általánosítása. Egyik fő eredményük ennek megfelelően a Menger-tétel és a Tutte-tétel közös általánosítása; nyitva maradt azonban a kérdés, hogy létezik-e olyan algoritmus a szóban forgó optimalizálási feladat megoldására, amely az Edmonds-féle maximális párosítási algoritmushoz hasonlít, vagyis alternáló utakat és bizonyos összehúzásokat használ. Hiába volt az útpakolásokra olyan tétel, amelynek megfogalmazása a Tutte-tételnél (illetve a Berge–Tutte-formulánál) alig bonyolultabb, az Edmonds-féle algoritmikus bizonyítást nem sikerült senkinek sem kiterjesztenie. Pap Gyula volt az, aki rájött a megoldásra. Ez egyúttal új megközelítést is jelent ilyen típusú problémák kezelésére. Módszerét más problémákra is sikerrel alkalmazta: egy megdöbbentően egyszerű algoritmust konstruált a maximális K_{tt}-mentes t-párosítások keresésére páros gráfban. Itt a t-párosítás egy olyan részgráf, amelyben minden pont foka legfeljebb t, és a K_{tt}-mentesség azt jelenti, hogy a kiválasztott részgráf nem tartalmazhat tt-es teljes páros gráfot. A feladatra szép min-max tétel ismeretes volt, de még a $t = 2$ esetre is nehéznek tűnt polinomiális algoritmus megkonstruálása. Módszerével szép algoritmust talált Mader híres A-utas tételére is. Eljárása sokkal egyszerűbb és áttekinthetőbb annál, amit Seymour és munkatársai korábban dolgoztak ki. Nem csupán a meglévő modellekre vonatkoznak, hanem az általa kifejlesztett általánosításokra is. Például kidolgozta Mader tételének kiterjesztését, az útpárosítás probléma általánosítását páros faktorokra, amelyre azután Edmonds-Gallai–típusú struktúra tételt igazolt, és az algoritmusa is ezen az általánosabb modellen működik jól.

Eddig 12 dolgozata jelent meg vagy áll megjelenés előtt. Különösen értékes a Mathematical Programming c. folyóiratban megjelent munka, mert ez a kötet a 2005-ös Integer Programming and Combinatorial Optimization c. konferencia 32 előadása közül a legértékesebb tíz dolgozatot tartalmazza. 2005-ben és 2007-ben is meghívták az oberwolfachi konferencia-központban rendezett konferenciára. Az idei STOC konferencián előadást is tarthatott. Számos további nemzetközi konferencián vett részt.

Röst Gergely egyetemi tanulmányait a Szegedi Tudományegyetem matematikus szakán végezte 2001-ben. Az egyetem elvégzése után három évig az SZTE doktorandusza. PhD értekezését „Periodikus funkcionál-differenciálegyenletek bifurkációelmélete" címmel védte meg 2006-ban, és sub auspicius doktori címet kapott. 2004-től tanársegéd az SZTE alkalmazott és numerikus matematika tanszékén. 2006-ban másfél éves posztdoktori ösztöndíjat kapott a torontói York Egyetemre. 2007-től az MTA-SZTE analízis és sztochasztika kutatócsoport tagja.

Kutatási témája a funkcionál-differenciálegyenletek és alkalmazásaik. Eddig 7 dolgozata jelent meg, további kettőt nyújtott be. Fontos eredményeket ért el a periodikus funkcionál-differenciálegyenletek bifurkációelméletében. Olyan paramétertől függő egyenletet vizsgált, ahol az egyenlet periodikus, az egyenletben egy időkésleltetés szerepel, és a periódus megegyezik az időkésleltetéssel. A fő eredménye az, hogy bizonyos paraméterértékeknél a nulla egyensúlyi helyzet egy környezetében egy invariáns tórusz keletkezik. Kidolgozta azt a technikát, amely segítségével a végtelen dimenziós Banach-térbeli probléma redukálható a jól ismert kétdimenziós paraméteres leképezésekre vonatkozó Neimark–Sacker-bifurkációra. Bizonyos értelemben analógok az autonóm (időfüggetlen) egyenletekre ismert Hopf-bifurkációs eredményekkel, de a bizonyítás technikái és az eredmények egy része messze bonyolultabbak.

Nem monoton visszacsatolást modellező egyenletek egy osztályára olyan attraktív halmazt konstruált, ahol a monoton dinamikai rendszerek eredményei alkalmazhatók a globális dinamika leírására. Ezzel a technikával olyan klasszikus egyenletekre, mint pl. a Mackey–Glass-egyenletek, kapott jól alkalmazható feltételeket a kaotikus dinamika kizárására. A globális dinamikában fontos, a triviális egyensúlyi helyzetet periodikus pályával összekötő pálya létezését igazolta.

Négy dolgozata foglalkozik járványtani modellekkel. A dolgozatok egy vagy több vírus által okozott járvány időbeni lefolyását modellezik, a lehetséges beavatkozások (gyógyszerezés, karantén, stb.) hatásait vizsgálják. Egyrészt a modellegyenletek felállítása fontos eredmény, másrészt a különböző járványtani szituációk gyakran új típusú modellegyenleteket eredményeznek, amelyek nem triviális elméleti problémákat vetnek fel. Több szakterületről érkező módszer kombinálása jellemzi a dolgozatokat.

Oktatási és tehetséggondozó tevékenysége is kiváló. Feladatmegoldó szemináriumot vezet, négy éven át felkészítette és kísérte az SZTE matematikus hallgatóit nemzetközi matematikai versenyekre. 2005-ben a hallgatók által adott „Arany kréta" díjat kapta meg. Tudományos dolgozatai mellett több ismeretterjesztő cikket is írt.

Szabó Jácint jelenleg a SZTAKI tudományos kutatója. Eredményeinek egy részéről áttekintést ad a 2007 tavaszán summa cum laude minősítéssel megvédett *Graph packings and the degree prescribed subgraph problem* c. doktori értekezése. Kutatásairól megállapítható, hogy kitűnő új eredmények gazdag gyűjteményét vonultatja fel. Egy korábban szinte lezártnak hitt területről sikerült megmutatnia, hogy az megannyi további izgalmas probléma forrása. Kérdésfelvetései gyakran újszerűek, megoldási módszerei komoly bizonyítóerőről tesznek tanúbizonyságot.

A gráfelmélet, kombinatorikus optimalizálás egyik legalaposabban kidolgozott fő iránya a párosítások elmélete. Mára már olyannyira kivizsgáltnak tűnik, hogy lényegi új eredmények elérése valóban komoly teljesítménynek számít. Szabó Jácintnak ez mégis nagymértékben sikerült.

A Tutte-tételnek számos természetes kiterjesztése kínálkozik. Ezek egyike a gráf pakolási feladat. Maga a párosítás létezése, illetve általánosabban a maximális párosítás meghatározása is megfogalmazható ebben az alakban, hiszen a kérdés az, hogy maximum hány K_2 gráfot (azaz élt) lehet egy adott gráfba diszjunkt módon bepakolni. Az általánosítás alapja az, hogy gráfoknak egy előre adott G családjából kell a pakolásra kerülő részgráfokat választani. Itt lényeges különbség mutatkozik annak megfelelően, hogy feszített módon akarjuk a gráfokat pakolni avagy ezen megkötés nélkül. Ez utóbbi problémaosztály is kettéválasztható az eredmények szempontjából aszerint, hogy K_2 hozzátartozik-e G-hez (ez az élt magában foglaló eset) avagy sem. Szabó Jácint az élt magában foglaló pakolások korábbi eredményeinek adja meg egy közös általánosítását Berge–Tutte-típusú min-max és Gallai–Edmonds-típusú struktúratételt szolgáltatva. A feszített csillagpakolási feladat újszerű, kompakt tárgyalása egy egyszerű, alternáló erdős algoritmus megalkotását tesz lehetővé.

Egy másik érdekes eredmény kiinduló pontja Lovász harminc éves dolgozata, melyet Cornuejols algoritmusa tett teljessé. Az itt lévő technika felhasználása tette lehetővé, hogy megoldja Recski András egy szép sejtését a matroid partner (parity) probléma kiterjesztéséről. A partner probléma területén további jelentős eredményeket ért el. Társszerzőivel például feltárta azon speciális eseteket, amikor a min-max tételben a partíciós feltétel elegendőnek bizonyul.

Egy további eredmény Las Vergnas korábbi ún. csillagpakolási eredményeit terjeszti ki nagymértékben. A megközelítés egyben polinomiális algoritmust is szolgáltat, és egyúttal igazolja a probléma matroidos karakterét is (abban az értelemben, ahogy Edmonds és Fulkerson igazolta, hogy egy maximális számú párosítás által fedett ponthalmazok egy matroid bázisait alkotják).

Külön említést érdemel azon eredménye, amely Kaneko egy meglepő korábbi eredményét általánosítja jelentős mértékben. Olyan maximális részgráf meghatározására ír le (társszerzőkkel) algoritmust és tételt, amelyben minden komponensben a maximális fokszám pontosan k. (A $k = 1$ eset az eredeti párosítás probléma, míg $k = 2$-nél jutunk vissza Kaneko tételéhez.)

Dolgozatai közül eddig 11 jelent meg, illetve áll megjelenés előtt. Négy további munkáját nyújtotta már be. Eredményeiből több nemzetközi konferencián is előadást tartott.

Farkas Gyula-emlékdíj

A bizottság a beérkezett javaslatok alapján 2007-ben három Farkas Gyula-emlékdíjat adományoz. A díjazottak: **Csizmadia Zsolt** (ELTE TTK operációkutatási tanszék), **Jüttner Alpár** (ELTE TTK operációkutatási tanszék) és **Tóth Boglárka** (BME Matematikai Intézet, differenciálegyenletek tanszék)

Indoklás: *Csizmadia Zsolt* 1980-ban született. Az ELTE alkalmazott matematika szakán végzett 2003-ban. Az ELTE-n a Matematikai Doktori Iskolában védte meg 2007-ben doktori disszertációját. Fő kutatási területe a lineáris és nem lineáris optimalizálás. A lineáris megengedettségi feladatra Anstreicher és Terlaky monoton szimplex algoritmusát továbbfejlesztve adott egy új eljárást, külön kitérve arra, hogyan lehet jól kezelni a degenerált eseteket. Az elméleti eredmények mellett a kutatás másik haszna, hogy a kifejlesztett módszerek alkalmazhatónak bizonyultak az olajiparban a termelés-tervezés során felmerülő bilineáris optimalizálási feladatokra is. Logikai adatelemzés témában a Rutcorral közös kutatást végzett, elsősorban orvosi adatbázisokban a logikai összefüggések keresésére és rejtett tulajdonságok feltárására. Tevékenysége mutatja, hogy alkotó módon tud részt venni a legkülönbözőbb típusú modellek kialakításában és azok numerikus megoldásában.

Jüttner Alpár 1975-ben született. Az ELTE matematikus szakára járt, majd az ELTE operációkutatási tanszékén volt doktorandusz. A doktori fokozatot 2007-ben kapta meg. Kutatásainak középpontjában a kombinatorikus optimalizálás paraméteres problémáinak vizsgálata áll. Tipikus megközelítési módja, hogy a diszkrét optimalizálási problémát többváltozós paraméteres probléma megoldására vezeti vissza, és megmutatja hogy a kapott folytonos optimalizálás közelítő megoldásai az eredeti diszkrét feladatnak is elég jó megoldásai. Például a költségkorlátos szubmoduláris folyam problémára ilyen módon adott egy erősen polinomiális megoldást, ami a tekintélyes SIAM Journal on Discrete Mathematics folyóiratban jelent meg. Több nagyon szép elméleti eredménye a távközlési hálózatok tervezésében is felhasználható. Ezekből két elfogadott US szabadalma is van. Vezetésével készült egy sikeres számítógépes programkönyvtár, ami egy szabadon elérhető keretrendszer hálózatokkal kapcsolatos optimalizálási feladatokra.

Tóth Boglárka 1977-ben született. A Szegedi Tudományegyetem programtervező matematikus szakára járt. A diploma után ugyanott az informatika tanszékcsoporton volt doktorandusz. 2007-ben a spanyolországi Murciai Egyetemen védte meg doktori disszertációját. A disszertáció az amerikai operációkutatási és menedzsment tudományi társaság (INFORMS) a UPS-SOLA Dissertation Award győztese lett. Az egyetem elvégzése óta aktív kutatómunkát folytat a globális optimalizálás, intervallum aritmetika, megbízható módszerek és vállalatelhelyezési feladatok témaköreiben. Eddig 14 dolgozata jelent meg, többségében a szakterület nívós, nemzetközi folyóirataiban, eredményei 27 konferencián szerepeltek. Az Acta Cybernetica műszaki szerkesztője, több konferencia szervezőbizottságának is tagja volt.

Rényi Kató-emlékdíj

A Bizottság a 2007. évi Rényi Kató-emlékdíj első fokozatát **Harangi Viktor**nak, az ELTE 2007-ben végzett és **Kevei Péter**nek, a SZTE 2007-ben végzett hallgatójának adja.

Indoklás: *Harangi Viktor* igazolta, hogy ha egy, a számegyenesen értelmezett, egész értékeket felvevő függvény előáll valós értékű periodikus függvények összegeként, akkor felbomlik azonos periódusú egész értékű periodikus függvények összegére is [1]. Egy másik eredményében jellemezte azokat a periódusokat, amelyek esetén egy valós függvény felbontása periodikus valós függvények összegére lényegében egyértelmű. Ennek alkalmazásával karakterizálta azokat a periódusokat, amelyekre igaz, hogy ha egy a számegyenesen egész értékű valós függvény előáll korlátos valós periodikus függvények összegeként, akkor előáll korlátos egész értékű periodikus függvények összegeként is, azonos periódusukkal [2]. Publikációi:

[1] B. Farkas, V. Harangi, T. Keleti, Sz. Révész: Invariant Decomipositions of functions with respect to commuting invertible transformations, *Proc. Amerr. Math. Soc.*, megjelenés alatt.

[2] V. Harangi, On the uniqueness of periodic decompositions, kézirat.

[3] V. Harangi, Periodic decompositions of functions, *Real Analysis Exchange*, megjelenés alatt.

Kevei Péter [1] dolgozatában olyan autokatalitikus reakciók matematikai modelljét adja meg, amelyben a katalizátort kis mértékben kivonják a rendszerből. A [2] cikk tetszőlegesen torzított érmével játszott szentpétervári játékok esetén tetszőleges számú együttműködő játékosra meghatározza azon stratégiákat, amelyek minden játékosnál extra hozzáadott nyereményhez vezetnek. A [3] dolgozat a lehető legáltalánosabb szentpétervári játékokat együttműködési stratégiákkal játszó játékosok esetén bizonyít összetartó aszimptotikus sorfejtéseket. A [4] cikkben a szerzők megmutatják, hogy noha független változók bizonyos sorozataira általában nincs határeloszlás, egy, az átlaghoz elég közel álló lineáris kombinációra van. Publikációi:

[1] Á. Tóth, P. Kevei, D. Horváth: Lateral instability of stationary spherical reaction balls, *Physical Review E,* **74** (2006), No. 036214.

[2] P. Kevei, Generalized n-Paul paradox, *Statistics and Probability Letters,* **77** (2007), 1043–1049.

[3] S. Csörgő, P. Kevei, Merging asymptotic expansions for cooperative gamblers in generalized St. Petersburg games, *Acta Mathematica Hungarica,* közlésre benyújtva.

[4] S. Csörgő, P. Kevei, Merging of linear combinations to semistable laws, előkészületben.

„Patai László Alapítvány" díja

A 2007. évi díjat **Kevei Péter** kapta.

Indoklás: *Kevei Péter* 1984. március 25-én született, Szegeden. 2007-ben kiváló minősítéssel végzett alkalmazott matematikus szakon, a Szegedi Tudományegyetemen. Szeptember 1-től az MTA-SZTE Analízis és Sztochasztika Kutatócsoport tudományos segédmunkatársa, ugyanakkor a SZTE Bolyai Intézetének PhD hallgatója. 2004 júniusában kezdett el dolgozni, Csörgő Sándor vezetésével a kurrikulumon kívül. Kiemelkedő matematikai tehetségének, átfogó intellektuális érdeklődésének és szorgalmának köszönhetően rendkívül gyorsan kapcsolódott be a valószínűség-számítás klasszikus problémakörének vizsgálatába. Hamar elért arra a szintre, hogy önálló kutatóként tudjon nyitott kérdésekhez hozzányúlni. Vizsgálataiban a valószínűség-számítási intuíciót és kombinatorikus gondolkodást szépen ötvözi kifinomult analitikus ötletekkel, és legújabban kezd ráérezni a számítógépes munka ízére is. Diákköri dolgozatával előbb a 2005. évi XXVII. Országos Tudományos Diákköri Konferencián második, majd újabb dolgozatával a 2007. évi XXVIII. konferencián első díjat nyert. Diplomamunkájának angol nyelvű változata is közlésre vár.

Dr. Tóth Ágota és Dr. Horváth Dezső docensek irányításával a fizikai kémiai tanszéken végzett szakmai gyakorlatot. Reakciógömbök háromdimenziós perturbációval szembeni stabilitásának a reaktánsok paramétereitől való függését vizsgálták: megadta a reakció matematikai modelljét.

Kiváló előadást tartott *a XXVI. Seminar on Stability Problems for Stochastic Models* című nemzetközi konferencián. Négyszer képviselte a Szegedi Tudományegyetemet *az International Mathematics Competition for University Students* versenysorozaton, az első három alkalommal egyéni harmadik-, 2006-ban pedig első díjat kapott. Negyedéves korában demonstrátorként dolgozott a sztochasztika tanszéken, a másodéves matematikus csoportok valószínűség-számítási gyakorlatát vezette. Több ösztöndíjban is részesült, a 2005/2006 és a 2006/2007 tanévekben a

Köztársasági-, a 2003/2004, 2004/2005 és 2006/2007 tanévekben Szeged Városés a 2006/2007 tanévben a Sófi József Ösztöndíjat is elnyerte. 2007-ben a SZTE Természettudományi Karának Kiváló Hallgatója lett, kiemelkedő diákköri szerepléseit, pedig az Országos Tudományos Diákköri Tanács Pro Scientia Aranyéremmel jutalmazta.

KIEGÉSZÍTÉS A 2006. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENY JELENTÉSÉHEZ

A jelentésből – sajnálatos technikai hiba miatt – kimaradtak a feladatok kitűzőinek nevei. Ezt most pótoljuk. A 11 feladatot – azok sorrendjében – az alábbi kollégák javasolták:

1. *Juhász István*
2. *Tardos Gábor*
3. *Károlyi Gyula*
4. *Kiss Emil, Matthew Valeriote, Zádori László*
5. *Balog Antal*
6. *Ruzsa Imre*
7. *Keleti Tamás*
8. *Buczolich Zoltán*
9. *Laczkovich Miklós*
10. *Bárány Imre*
11. *Valkó Benedek.*

JELENTÉS A 2007. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 2007. október 26. és november 5. között rendezte meg a 2007. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint 2007-ben egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére a következő bizottságot kérte fel: *Totik Vilmos* (elnök), *Varjú Péter* (titkár), *Bálintné Szendrei Mária, Csákány Béla, Csörgő Sándor, Czédli Gábor, Hajnal Péter, Hatvani László,* *Kérchy László, Kincses János, Krámli András, Kurusa Árpád, Leindler László, Makay Géza, Maróti Miklós, Móricz Ferenc* és *Stachó László.*

A versenybizottság 10 feladatot tűzött ki. A feladatokat sorrendben Daróczy Zoltán, Gyárfás András, Ruzsa Imre, Károlyi Gyula, Totik Vilmos (5–7. feladat), Totik Vilmos és Varjú Péter, Ricardo Restrepo valamint Tóth Bálint és Valkó Benedek bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A versenyre 19 versenyző 93 megoldást nyújtott be, melyek közül 63 volt hibátlan. Ezek értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta:

I. díjban részesül **Harangi Viktor,** az ELTE 2007-ben végzett matematikus hallgatója;

II. díjban részesül **Paulin Roland,** az ELTE 2. éves matematikus hallgatója;

III. díjban részesülnek **Hubai Tamás** és **Rácz Béla András,** az ELTE 4. éves matematikus hallgatói;

Dicséretben részesülnek **Hablicsek Márton** és **Strenner Balázs,** az ELTE 3. éves, illetve **Horváth Márton, Kiss Demeter** és **Pach Péter Pál,** az ELTE 4. éves hallgatói.

Indoklás:

Harangi Viktor megoldja mind a 10 feladatot; kisebb hibát vét a 6. feladatban. Egyedül ő az, aki megoldja mind a 3., mind a 10. feladatot; kiemelkedő a 3., 8. és 10. feladatra adott megoldása.

Paulin Roland a 10. kivételével minden feldatot megold. Kiemelkedő a 3., 8. és 9. feladatra adott megoldása.

Hubai Tamás megoldja az 1., 2., 4., 6., 8. és 9. feladatokat, és kisebb hibával a 3. feladatot is.

Rácz Béla András megoldja az 1., 2., 4., 5., 8., 9. feladatokat (ez utóbbit kissé hiányosan); és javítható hibával a 6., illetve 7. feladatot.

Hablicsek Márton jó megoldást ad a 2., 4., 8. és 10. feladatokra (ez utóbbit rajta kívül mindössze egy versenyző oldotta meg), és kisebb hibával az 1. feladat a) részét is.

Horváth Márton megoldja a 2., 6., 8. feladatokat, és kisebb hibával a 9. feladatot is. Hiányos a 4. feladatra benyújtott megoldása.

Kiss Demeter megoldja a 2., 5. és 6. feladatokat, és kisebb hibával a 7. és 9. feladatokat is. Erősen hiányos a 8. feladatra benyújtott megoldása.

Pach Péter Pál helyesen oldja meg a 2., 4., 7. és 9. feladatokat, és kisebb hibával a 6-at. A 8. feladatra benyújtott megoldása erősen hiányos.

Strenner Balázs megoldja a 4., 6. és 9. feladatokat. Részeredményt ér el a 8. feladat megoldásában.

A 2007. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Igazoljuk, hogy van

a) nem mérhető,

b) 0 mértékű és kontinuum számosságú

részteste $\mathbf{R}$-nek!

2. Egy n^2+n-1 elemű halmaz összes n elemű részhalmazát két csoportba osztjuk. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik csoportban lesz n páronként diszjunkt halmaz!

3. Jelölje $\omega(n)$ az n természetes szám prímosztóinak számát (multiplicitás nélkül). Legyen

$$F(x) = \max_{n\le x} \omega(n), \qquad G(x) = \max_{n\le x} \big(\omega(n) + \omega(n^2+1)\big).$$

Igazoljuk, hogy $G(x) - F(x) \to \infty$ ha $x \to \infty$.

4. Legyen p prímszám, és legyenek $a_1, \dots, a_{p-1}$ a p elemű $\mathbf{Z}_p$ (mod p) csoport nem feltétlenül különböző nem 0 elemei. Igazoljuk, hogy $\mathbf{Z}_p$ minden eleme előáll bizonyos a_i-k összegeként (az üres összeg 0)!

5. Legyen $D = \{(x,y) \mid x > 0,\ y \neq 0\}$, és legyen $u \in C^1(\overline{D})$ olyan korlátos függvény, amely harmonikus D-ben, és amelyre $u = 0$ az y tengelyen. Mutassuk meg, hogy u azonosan 0!

6. Mely $A \subset \mathbf{R}$ halmazokra igaz az, hogy ha $0 \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le 1$, $n = 1, 2, \ldots$ tetszőlegesek, akkor vannak olyan $y_j \in A$ számok, hogy $y_{j+1} - y_j > x_{j+1} - x_j$ minden $0 \le j < n$-re?

7. Mutassuk meg, hogy léteznek n_k, m_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ természetes számok úgy, hogy az $n_k + m_k$, $k = 1, 2, \ldots$ összegek különböző prímszámok, és az $x^{n_k} y^{m_k}$ polinomok lineáris kombinációinak halmaza sűrű $C\big([0,1] \times [0,1]\big)$-ben a szuprémum normára nézve!

8. Egy $A = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ sorozatra legyen $SA = \{a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots\}$ az $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ sor részletösszegeinek sorozata. Van-e olyan nem azonosan nulla A sorozat, amelyre az $A, SA, SSA, SSSA, \ldots$ sorozatok mind konvergensek?

9. Legyen A és B két háromszög a síkon úgy, hogy mindkettő a belsejében tartalmazza az origót, és minden origó középpontú C_r körvonalra $|C_r \cap A| = |C_r \cap B|$ (itt $|\cdot|$ ívmértéket jelent a C_r-en). Igazoljuk, hogy A és B egybevágó. Igaz marad-e az állítás, ha az origó A és B határán van?

10. Legyenek $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ azonos eloszlású, valós értékű független valószínűségi változók 0 várható értékkel. Tegyük fel, hogy a $\Lambda(\lambda) := \log \mathbf{E} \exp(\lambda \zeta_i)$ logaritmikus momentumgeneráló függvényük minden $\lambda \in \mathbf{R}$-re létezik ($\mathbf{E}$ a várható értéket jelöli). Legyen továbbá $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ olyan függvény, amelyre $G(x) \le \min\big(|x|, x^2\big)$. Bizonyítsuk be, hogy akkor elég kis $\gamma > 0$-ra az alábbi sorozat korlátos:

$$\left\{\mathbf{E} \exp\left(\gamma l G\left(\frac{1}{l}(\zeta_1 + \ldots + \zeta_l)\right)\right)\right\}_{l=1}^{\infty}.$$

A megoldások ismertetése

1. feladat (Daróczy Zoltán). *Igazoljuk, hogy van*

a) *nem mérhető,*

b) 0 *mértékű és kontinuum számosságú*

részteste **R**-*nek!*

I. megoldás az a) részre (Paulin Roland). Jelölje Z az **R** pozitív mértékű zárt részhalmazainak halmazát. Legyen $Z = \{A_\alpha \mid \alpha < c\}$ egy jólrendezés. Itt, és a továbbiakban c a kontinuum számosságot jelöli.

Az alábbiakban transzfinit rekurzióval definiálni fogjuk az $x_\alpha, y_\alpha \in A_\alpha$ számokat úgy, hogy $\{x_\alpha, y_\alpha \mid \alpha < c\}$ algebrailag független. Ezután tekintsük az x_α számok által generált F testet. Ekkor F nem lehet pozitív mértékű, mert akkor a mérték regularitása miatt $A_\alpha \subset F$ valamely α-val. Ez viszont ellentmond y_α választásának. Hasonlóan igazolható, hogy F komplementere sem lehet pozitív mértékű, tehát F nem mérhető.

Tehát az x_α, y_α számok megadásával a megoldás teljessé válik. Legyen $\alpha < c$, és tegyük fel, hogy minden $\beta < \alpha$-hoz x_β és y_β már adott, és ezek algebrailag függetlenek. Legyen K az $\{x_\beta, y_\beta \mid \beta < \alpha\}$ által generált test. Világos, hogy $|K| = \max\{|\alpha|, \aleph_0\}$, mivel K elemeit a testműveletek véges számú alkalmazásával kaphatjuk az x_β, y_β és a racionális számokból. Legyen K' a K algebrai lezártja. Ekkor $|K'| = |K|$, mivel a K-beli együtthatójú polinomok számossága $|K|$, és minden polinomnak véges sok gyöke van. Legyen x_α az $A_\alpha \setminus K'$ halmaz tetszőleges eleme (ez a halmaz nem üres, mivel minden pozitív mértékű halmaz tartalmaz perfekt halmazt, így A_α kontinuum számosságú, míg K, K' számossága ennél kisebb). Hasonlóan definiáljuk az y_α számot a K helyett az $\{x_\beta, y_\beta \mid \beta < \alpha\} \cup \{x_\alpha\}$ által generált testből kiindulva. Világos, hogy így algebrailag független számokat kapunk.

II. megoldás az a) részre (Rácz Béla András). Legyen μ a Lebesgue-mérték a számegyenesen. Először megmutatjuk, hogy **R** minden mérhető, valódi F résztesete 0 mértékű. Legyen $A = F \cap [0,1)$. Mivel F az A egész számokkal való eltoltjainak diszjunkt uniója, elegendő azt megmutatni, hogy A mértéke 0. Legyen $0 < t < 1$ olyan szám, ami nincs benne A-ban. Ekkor az $A + rt$ halmazok páronként diszjunktak, ha r befutja a $(0,1)$-beli racionális számok halmazát. Valóban, ha $a_1 + tr_1 = a_2 + tr_2$ valamely $a_1, a_2 \in A$ és $r_1 \neq r_2$ racionális számokkal, akkor $t = (a_1 - a_2)/(r_2 - r_1) \in F$ miatt ellentmondásra jutunk. Ekkor $\bigcup (A + rt) \subset [0,2]$ miatt

$$2 \geq \sum \mu(A + rt) = \infty \cdot \mu(A),$$

azaz $\mu(A) = 0$.

Az alábbiakban megadunk **R** valódi résztesteinek egy olyan $F_0, F_1, \dots$ sorozatát, amelyre $\bigcup F_i = \mathbf{R}$. Ekkor nem lehet minden F_i mérhető, mert akkor a fentiek miatt a

$$\mu(\mathbf{R}) \leq \sum \mu(F_i) = 0$$

ellentmondáshoz jutunk.

Legyen F_0 az **R** egy olyan maximális résztestje, ami nem tartalmazza a $\sqrt[n]{2}$ számot semmilyen $n \geq 2$ egészre. Ilyen résztest létezését a Zorn lemma garantálja, hiszen ha az F_α résztestek a tartalmazásra nézve láncot alkotnak, akkor $\bigcup F_\alpha$ is résztest amely nem tartalmazza egyik $\sqrt[n]{2}$ számot sem.

Megmutatjuk, hogy az $\mathbf{R} \mid F_0$ bővítés algebrai. Ennek érdekében tegyük fel indirekt, hogy létezik $a \in \mathbf{R}$, ami transzcendens F_0 felett. Ekkor F_0 maximalitása miatt $\sqrt[n]{2} \in F_0(a)$ valamely n-re, azaz vannak olyan relatív prím $P, Q \in F_0[x]$ polinomok, amikre $\sqrt[n]{2} = P(a)/Q(a)$. Innen a $2Q(a)^n - P(a)^n = 0$ egyenlőség adódik. Mivel a transzcendens, $2Q^n - P^n \equiv 0$. Ha b, illetve c jelöli a P, illetve Q polinomok konstans tagját, akkor $2c^n - b^n = 0$. Mivel P és Q relatív prím, nem lehet $b = c = 0$. Ez viszont a $\sqrt[n]{2} = \pm b/c \in F_0$ ellentmondáshoz vezet.

Megmutatjuk, hogy ha p prím, akkor $\sqrt[p]{2}$ foka F_0 felett p. Ehhez elegendő azt látni, hogy az $x^p - 2$ polinom irreducibilis F_0 felett. A komplex számok felett

$$x^p - 2 = \prod_{j=0}^{p-1} \left(x - \sqrt[p]{2}\varepsilon^j\right),$$

ahol ε egy primitív p-edik egységgyök. Tegyük fel, hogy valamely $I \subsetneq \{0, \dots, p-1\}$ halmazzal a

$$P(x) = a \prod_{j \in I} \left(x - \sqrt[p]{2}\varepsilon^j\right)$$

polinom $F_0[x]$-beli, azaz osztója az $x^p - 2$ polinomnak F_0 felett. Mivel a főegyüttható $a \in F_0$, feltehető, hogy $a = 1$. Ha P k-adfokú, akkor a konstans tag abszolút értéke $2^{k/p} \in F_0$. Ha $k \notin \{0, p\}$, akkor van olyan l pozitív egész, amire $kl \equiv 1 \bmod p$. Ekkor $\sqrt[p]{2} = \left(2^{k/p}\right)^l / 2^m \in F_0$ valamely m pozitív egésszel, ami ellentmondás. Tehát P foka 0 vagy p, azaz $x^p - 2$ valóban irreducibilis.

$n > 0$-ra legyen F_n az a test, amit úgy kapunk, hogy F_0-hoz adjungáljuk az összes felette legfeljebb n-edfokú valós számot. Mivel F_0 felett minden szám algebrai, $\bigcup F_n = \mathbf{R}$. Hátra van még annak igazolása, hogy mindegyik F_n valódi résztest. Megmutatjuk, hogy $\sqrt[p]{2} \notin F_n$ minden $p > n$ prímre. Tegyük fel indirekt ennek az ellenkezőjét. Ekkor vannak olyan $a_1, \dots, a_k$ F_0 felett legfeljebb n-edfokú számok, hogy $\sqrt[p]{2} \in F_0(a_1, \dots, a_k)$ (ez utóbbi az F_0 bővítését jelöli az $a_1, \dots, a_k$ elemekkel). Mivel $\sqrt[p]{2}$ foka F_0 felett p, az $F_0(a_1, \dots, a_k) \mid F_0$ bővítés $\left[F_0(a_1, \dots, a_k) : F_0\right]$ foka osztható p-vel. Viszont

$$\left[F_0(a_1, \dots, a_k) : F_0\right] = \left[F_0(a_1, \dots, a_k) : F_0(a_1, \dots, a_{k-1})\right] \cdot \ldots \cdot \left[F_0(a_1) : F_0\right],$$

és a jobb oldalon szereplő tényezők egyike sem osztható p-vel (mindegyik p-nél kisebb), azaz ellentmondásra jutottunk. Ezzel a megoldás teljes.

I. megoldás a b) részre (Harangi Viktor). Tekintsük a következő perfekt sémát. Tekintsük az $[1, 4]$ intervallumot, majd válasszunk ki benne két diszjunkt 1 hosszú zárt intervallumot. Az n-edik lépésben a meglévő 2^{n-1} zárt intervallum mindegyikéből válasszunk ki két-két n^{-n} hosszú diszjunkt zárt intervallumot. Az így kapott 2^n intervallum alkotja az n-edik intervallumrendszert. Jelölje A az így kapott intervallumrendszerek metszeteként adódó Cantor típusú halmazt. Az A által generált F testről megmutatjuk, hogy nullmértékű. Mivel A és így F is kontinuum számosságú, ezzel befejezzük a megoldást. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az intervallumokat úgy választottuk ki, hogy $1 \in A$ teljesüljön.

Egy $B \subset \mathbf{R}$ halmazt nevezzünk kicsinek, ha vannak olyan c, d konstansok, hogy minden n-re B lefedhető legfeljebb c^n darab d/n^n hosszú intervallummal. Ekkor A kicsi, mert lefedhető 2^n darab n^{-n} hosszú intervallummal. Vegyük észre, hogy a kicsiségből következik a nullmértékűség, hiszen egy ilyen halmaz mértéke legfeljebb $d(c/n)^n$, ami tetszőlegesen kicsivé válik, ha n végtelenbe tart.

Egy $B \subset \mathbf{R}$ halmazra legyen

$$-B = \{-b \mid b \in B\}, \quad \text{illetve} \quad B^{-1} = \{b^{-1} \mid b \in B\},$$

továbbá a $B_1, B_2 \subset \mathbf{R}$ halmazokra alkalmazzuk a következő jelöléseket:

$$B_1 + B_2 = \{b_1 + b_2 \mid b_i \in B_i\}, \quad B_1 \cdot B_2 = \{b_1 \cdot b_2 \mid b_i \in B_i\},$$

illetve

$$B_1 - B_2 = B_1 + (-B_2).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy F megszámlálható sok kicsi halmaz uniója, ebben a kulcslépés a következő

Lemma. *Tegyük fel, hogy B_1 és B_2 kicsi halmazok. Ekkor $B_1 + B_2$, illetve $B_1 - B_2$ is kicsi. Ha még $B_1, B_2 \subset [0, K]$ is fennáll valamely $K > 0$-ra, akkor $B_1 \cdot B_2$ is kicsi. Továbbá, ha $B_0 \subset [\delta, \infty)$ valamely $\delta > 0$-ra, akkor B_0^{-1} is kicsi.*

Bizonyítás. Mivel B_i kicsi, ezért léteznek c_i, d_i konstansok, és minden n-re zárt intervallumoknak egy $\mathcal{I}_i^{(n)}$ rendszere úgy, hogy az $\mathcal{I}_i^{(n)}$-beli intervallumok lefedik B_i-t, számuk legfeljebb c_i^n, hosszuk pedig d_i/n^n $(i = 0, 1, 2)$.

Ekkor

$$B_1 + B_2 \subset \bigcup_{I_i \in \mathcal{I}_i^{(n)}} (I_1 + I_2), \quad \text{illetve} \quad B_1 \cdot B_2 \subset \bigcup_{I_i \in \mathcal{I}_i^{(n)}} (I_1 \cdot I_2).$$

Könnyen látható, hogy $I_1 + I_2$ egy $(d_1 + d_2)/n^{-n}$ hosszú zárt intervallum. A fentiek szerint $(c_1 c_2)^n$ ilyen intervallummal lefedhető $B_1 + B_2$, így az valóban kicsi. Ezt B_2 helyett $-B_2$-re alkalmazva kapjuk, hogy $B_1 - B_2$ is kicsi.

Most tegyük fel, hogy $B_i \subset [0, K]$ $(i = 1, 2)$. Feltehető, hogy a fedő intervallumok is teljes egészében $[0, K]$-ban vannak. Legyen $I_i = [a_i, a_i + \varepsilon_i] \subset [0, K]$, ekkor az

$$I_1 \cdot I_2 = \big[a_1 a_2, a_1 a_2 + (a_1 + \varepsilon_1)\varepsilon_2 + a_2 \varepsilon_1\big]$$

intervallum hossza legfeljebb $K(d_1 + d_2)/n^n$. És persze $(c_1 c_2)^n$ ilyen intervallum lefedi a $B_1 \cdot B_2$ halmazt.

Végül tekintsük a B_0-t fedő intervallumok $\mathcal{I}_0^{(n)}$ rendszerét. Feltehetjük, hogy maguk az intervallumok is benne vannak $[\delta, \infty)$-ben. Ekkor egy $[a, b]$ intervallum reciproka a $[b^{-1}, a^{-1}]$ intervallum, melynek hossza $a^{-1} - b^{-1} = (b - a)/ab \leq d_0/\delta^2 n^n$ és c_0^n ilyen intervallum lefedi a B_0^{-1} halmazt. ∎

Most A-ból felépítjük az általa generált F testet. Jelölje P_k a k darab A-beli elem szorzataként előálló számok halmazát, azaz $P_1 = A$ és $P_k = A \cdot P_{k-1}$ minden $k > 1$-re. Mivel $1 \in A$, $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \ldots$. A Lemma miatt P_k kicsi minden k-ra. Legyen S_k a P_k elemeiből álló legfeljebb k-tagú összegek halmaza. Ez a Lemma szerint k darab kicsi halmaz uniója, tehát kicsi. Legyen továbbá $D_k = S_k - S_k$, ami szintén kicsi. Ekkor $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \ldots$, és a disztributivitás miatt az $R = \bigcup D_k$ halmaz az A által generált gyűrű.

Ekkor $F = R/\big(R \backslash \{0\}\big)$, azaz F minden eleme két R-beli elem hányadosa. Végül definiáljuk az $U_k = D_k \cap [1/k, \infty)$ halmazokat. Ekkor $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots$, és

$$F = \left(\bigcup_k \frac{U_k}{U_k}\right) \cup \{0\} \cup \left(\bigcup_k \frac{-U_k}{U_k}\right).$$

Vegyük észre, hogy $U_k \subset [1/k, 4^k k]$, és így a Lemma szerint a fenti unióban minden halmaz kicsi. Így a fenti megjegyzések szerint F egy kontinuum számosságú 0 mértékű részteste $\mathbf{R}$-nek.

II. megoldás a b) részre (Paulin Roland). Neumann János [4] egy tétele szerint, ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2^{\lfloor nx \rfloor}}}{2^{2^{n^2}}},$$

akkor $A = f\big((0,\infty)\big)$ egy Borel-halmaz, amelynek elemei algebrailag függetlenek $\mathbf{Q}$ felett.

Legyen $a \in A$ tetszőleges, és tekitsük a $B = A \backslash \{a\}$ halmazt. Megmutatjuk, hogy a B által generált F test mérhető. Mivel f injektív, A és így F is kontinuum számosságú. Az a) részre adott második megoldásban megmutattuk, hogy $\mathbf{R}$ minden mérhető, valódi résztestje 0 mértékű. Ekkor $a \notin F$ miatt F valódi résztest, tehát nullmértékű.

Legyen R a B által generált egységelemes gyűrű. Ha $P(x) \in \mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_n]$, akkor $P(B^n)$ analitikus halmaz, hiszen $B^n \subset \mathbf{R}^n$ Borel, és P folytonos. Tehát R is analitikus, mert megszámlálható sok ilyen halmaz uniója. De ekkor $R \times \big(R\backslash\{0\}\big)$ is analitikus, és a $\psi : R \times \big(R\backslash\{0\}\big) \to F$, $\psi(a,b) = a/b$, szürjektív függvény folytonossága miatt F is analitikus, tehát mérhető.

Megjegyzés. Harangi Viktor dolgozatában a [2] és a [6] cikkekre hivatkozik, amelyekben szerepel a feladat a) részének megoldása.

2. feladat (Gyárfás András). *Egy n^2+n-1 elemű halmaz összes n elemű részhalmazát két csoportba osztjuk. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik csoportban lesz n páronként diszjunkt halmaz!*

Megoldás (Hablicsek Márton). Tekintsünk egy $(n+1)k-1$ elemű A halmazt, és osszuk az n elemű részhalmazait két csoportba. Az egyes csoportok elemeit nevezzük piros, illetve kék halmazoknak. Teljes indukcióval belátjuk, hogy van k darab páronként diszjunkt azonos színű halmaz. Ezen állítás $k=n$ esete éppen a bizonyítandó állítás.

A $k=1$ eset triviális, ezért tegyük fel, hogy $k>1$, és $k-1$-re igaz az állítás. Ha A-nak van $n+1$ eleme úgy, hogy kiválasztható közülük egy piros és egy kék halmaz is, akkor az állítás igaz. Valóban, a maradék $(n+1)(k-1)-1$ pontra alkalmazva az indukciós feltevést, $k-1$ darab páronként diszjunkt, azonos színű halmazt kapunk. Ezt kiegészíthetjük egy megfelelő színű halmazzal a fent kiválasztott $n+1$ elemből.

Tehát feltehetjük, hogy A minden $n+1$ elemű részhalmaza csak egyféle színű halmazt tartalmaz. Ekkor akármelyik n elemű halmaz egy elemét egy tetszőlegesre kicserélhetjük úgy, hogy nem változik a színe. Emiatt bármelyik két halmaz azonos színű, mert az elemeket egyesével kicserélve egyiket megkaphatjuk a másikból. Tehát bármelyik k darab diszjunkt halmaz mutatja, hogy teljesül az állítás k-ra is.

Megjegyzés. Az állítás éles, n^2+n-2 elemre már nem igaz. Valóban, az $\{1,\ldots,n^2+n-2\}$ halmaz egy n elemű részhalmaza kerüljön az I. osztályba ha tartalmazza az $n-1$ legnagyobb elem valamelyikét, egyébként (ha tehát részhalmaza az $\{1,\ldots,n^2-1\}$ halmaznak) kerüljön a II. osztályba. Könnyen látható, hogy egyik osztályban sincs n páronként diszjunkt halmaz.

3. feladat (Ruzsa Imre). *Jelölje $\omega(n)$ az n természetes szám prímosztóinak számát (multiplicitás nélkül). Legyen*

$$F(x) = \max_{n \le x} \omega(n), \qquad G(x) = \max_{n \le x} \big(\omega(n) + \omega(n^2+1)\big).$$

Igazoljuk, hogy $G(x) - F(x) \to \infty$ ha $x \to \infty$.

Megoldás (Paulin Roland). Ha $P_1, P_2, \ldots$ a prímszámok sorozata, akkor nyilvánvalóan $F(x) = \max\{t \mid P_1 \ldots P_t \le x\}$. Legyenek $p_1 = 3, p_2 = 7, \ldots$ a $4i-1$ alakú prímek, és $q_1 = 5$, $q_2 = 13$, $\ldots$ a $4i+1$ alakúak. Ha $x \ge 30$, akkor

$$\{P_1, \ldots, P_{F(x)}\} = \{2, p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l\} \qquad (k, l \ge 1).$$

Legyen $r = \lfloor \sqrt{l} \rfloor$. A későbbiekben olyan x-nél nem nagyobb z pozitív egészeket fogunk tekinteni, amelyekre a $p_1, \ldots, p_k$, illetve a $q_1, \ldots, q_l$ prímek közül mindegyik osztja vagy a z vagy a z^2+1 számot. Célunk annak megmutatása, hogy „sok" ilyen szám van, és ha x elég nagy, akkor olyan is van köztük, ami a $q_{l+1}, \ldots, q_{l+r}$ prímekkel is osztható. Ehhez szükségünk van a következő két észrevételre.

I. Van olyan M, hogy minden $m \ge M$-re $q_m < m^2$. Valóban, a számtani sorozatokra vonatkozó prímszámtétel szerint

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(1,4,x)}{x/2\log x} = 1,$$

ahol $\pi(1,4,x)$ az x-nél nem nagyobb $4i+1$ alakú pímek számát jelöli. Ezt $x = q_m$-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{m \to \infty} \frac{m}{q_m/2\log q_m} = 1.$$

Ha m elég nagy, akkor a bal oldali kifejezés nagyobb, mint $1/2$. Inenn adódik az állítás, mivel $q_m/4\log q_m > \sqrt{q_m}$, ha m elég nagy.

II. Van olyan X, hogy minden $x \ge X$-re $q_l \ldots q_{l+r} < 2^l$. Valóban, ha x elég nagy, akkor $l \ge M$, és az előző észrevétel miatt

$$q_{l+1} \ldots q_{l+r} < (l+1)^2 \ldots (l+r)^2 < (2l)^{2r} < (2l)^{2\sqrt{l}}.$$

Ha x és emiatt l is elég nagy, akkor a jobb oldal kisebb mint 2^l.

Mivel q_j $4i+1$ alakú, a -1 kvadratikus maradék mod q_j, azaz van olyan $s_j \in \mathbf{Z}$, melyre $s_j^2 \equiv -1 \pmod{q_j}$. Tekintsük azokat a z számokat, melyek oszthatók $p_1 \ldots p_k$-val, és minden $1 \le j \le l$-re

$$z \equiv 0 \pmod{q_j}, \quad \text{vagy} \quad z \equiv s_j \pmod{q_j}.$$

A kínai maradéktétel szerint 2^l ilyen szám van az $1 \le z \le p_1 \ldots p_k q_1 \ldots q_l$ intervallumban. Jelölje $1 \le z_1 < \ldots < z_{2^l} \le p_1 \ldots p_k q_1 \ldots q_l$ ezeket a számokat. A skatulyaelv és a fenti észrevétel miatt ha $x > X$, akkor valamely $i_1 < i_2$-re $z_{i_1} \equiv z_{i_2} \pmod{q_{l+1} \ldots q_{l+r}}$. Legyen $n = z_{i_2} - z_{i_1}$. Ekkor n osztható a $p_1, \ldots, p_k$ és a $q_{l+1}, \ldots, q_{l+r}$ prímek mindegyikével, és minden minden $1 \le j \le l$-re teljesül rá az

$$n \equiv 0 \pmod{q_j}, \quad n \equiv s_j \pmod{q_j} \quad \text{vagy} \quad n \equiv -s_j \pmod{q_j}$$

kongruenciák valamelyike. Az előbbi esetben $q_j \mid n$, a másik kettőben pedig $q_j \mid n^2+1$. Innen azt kapjuk, hogy $G(x) \ge k + l + r$, és $F(x) = k + l + 1$, amiből következik az állítás.

4. feladat (Károlyi Gyula). *Legyen p prímszám, és legyenek $a_1, \dots, a_{p-1}$ a p elemű $\mathbf{Z}_p$ (mod p) csoport nem feltétlenül különböző nem 0 elemei. Igazoljuk, hogy $\mathbf{Z}_p$ minden eleme előáll bizonyos a_i-k összegeként (az üres összeg 0)!*

Megoldás (Paulin Roland). Minden $0 \leq i < p$ egészre jelölje A_i azon $x \in \mathbf{Z}_p$ elemek halmazát, amelyek előállnak az $a_1, \dots, a_i$ elemek közül néhány összegeként. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $|H_i| \geq i + 1$. Az $i = p - 1$ eset éppen a bizonyítandó állítás. Ha $i = 0$, akkor $H_0 = \{0\}$, azaz valóban $|H_0| = 1$. Tegyük fel, hogy $i > 0$, és $i - 1$-re teljesül az állítás. Világos, hogy

$$H_i = H_{i-1} \cup \{x + a_i \mid x \in H_i\}.$$

Tegyük fel indirekt, hogy $|H_i| < i + 1$. Az indukciós feltevés miatt ez csak úgy lehetséges, hogy ha $|H_i| = |H_{i-1}| = i$, azaz $H_i = H_{i-1}$. Tehát minden $x \in H_{i-1}$-re $x + a_i \in H_{i-1}$. Ezt $x = 0$-ra alkalmazva, majd iterálva kapjuk, hogy $\{0, a_i, \dots, (p-1)a_i\} \subseteq H_{i-1}$. Mivel $a_i \neq 0$, a_i generálja $\mathbf{Z}_p$-t, azaz $\mathbf{Z}_p = H_{i-1}$. De ekkor $|H_{i-1}| = p$, ami ellentmond az indirekt feltevésnek, azaz az állítás i-re is igaz.

5. feladat (Totik Vilmos). *Legyen $D = \{(x, y) \mid x > 0,\ y \neq 0\}$, és legyen $u \in C^1(\overline{D})$ olyan korlátos függvény, amely harmonikus D-ben, és amelyre $u = 0$ az y tengelyen. Mutassuk meg, hogy u azonosan 0!*

Megoldás (Több versenyző megoldása alapján). Az alábbi három, harmonikus függvényekre vonatkozó tételt használjuk a megoldáshoz.

1. Liouville tétele [5, Corollary 1.3.2]: az egész síkon korlátos és harmonikus függvény állandó.
2. Minden harmonikus függvény végtelen sokszor differenciálható, és minden parciális deriváltja harmonikus.
3. Schwartz-féle tükrözési elv [5, Theorem 1.2.9]: Legyen az $U \subset \mathbf{R}^2$ nyitott halmaz szimmetrikus az x-tengelyre (y-tengelyre). Ha $v : U \to \mathbf{R}$ folytonos, és páratlan y-ban, azaz $v(x, y) = -v(x, -y)$ (x-ben, azaz $v(x, y) = -v(-x, y)$), továbbá v harmonikus az
$$U^+ = \{(x, y) \in U \mid y > 0\} \qquad \left(= \{(x, y) \in U \mid x > 0\}\right)$$
halmazon, akkor v U-n is harmonikus.

Elegendő bizonyítani, hogy u harmonikus a H jobb oldali nyitott félsíkon. Ugyanis ekkor u-t páratlanul kiterjesztve, 3. alapján az egész síkon harmonikus függvényt kapunk, ami korlátos is, így 1. szerint állandó, ami csak a 0 lehet.

Legyen $u_0(x, y) = u(x, y) - u(x, -y)$ minden $(x, y) \in \overline{D}$-ra. Ekkor 3. alapján u_0 harmonikus az egész H félsíkon. Mivel u_0 folytonos $\overline{D}$-on és $u_0(0, y) = 0$, ugyanúgy, mint fent u-ra, $u_0 \equiv 0$ következik. Tehát $u(x, y) = u(x, -y)$, és így $\partial u(x, y)/\partial y = -\partial u(x, -y)/\partial y$ H-n.

Legyen $u_1(x, y) = \partial u(x, y)/\partial y$, $(x, y) \in H$. Ekkor 2. miatt u_1 harmonikus D-n. Tehát 3. alkalmazható, és kapjuk, hogy u_1 is harmonikus H-n is. Ekkor 2. és

$$u(x, y) = u(x, 1) + \int_1^y u_1(x, s)\, ds$$

miatt u végtelen sokszor differenciálható H-n, és így $\partial \Delta u / \partial y = \Delta u_1 = 0$. Mivel D-n $\Delta u = 0$, ezért ebből $\Delta u = 0$ következik H-n, azaz u valóban harmonikus H-n is.

6. feladat (Totik Vilmos). *Mely $A \subset \mathbf{R}$ halmazokra igaz az, hogy ha $0 \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le 1$, $n = 1, 2, \ldots$ tetszőlegesek, akkor vannak olyan $y_j \in A$ számok, hogy $y_{j+1} - y_j > x_{j+1} - x_j$ minden $0 \le j < n$-re?*

Megoldás (Hubai Tamás). Nevezzük jónak azokat az A halmazokat, amikre a feladat szövegében leírt feltétel teljesül. Ha A nem korlátos, akkor minden n-re találunk olyan $y_1 < \ldots < y_n$ pontokat A-ban, melyekre $y_{j+1} - y_j > 1$, ezért A jó. Az is nyilvánvaló, hogy A pontosan akkor jó, ha a lezártja az. A továbbiakban feltesszük, hogy A korlátos és zárt.

Több esetet vizsgálunk. Először tegyük fel, hogy A mértéke kisebb mint 1 vagy pontosan 1, és A véges sok nem elfajuló intervallumból áll. Ekkor A lefedhető véges sok nem elfajuló

$$[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]$$

intervallummal, amelyek összhossza 1. A számozás legyen olyan, hogy $b_j < a_{j+1}$ minden j-re. Legyen $x_0 = 0$, és $x_j = x_{j-1} + (b_j - a_j)$, ha $1 \le j \le k$. Állítjuk, hogy ezekhez nincsenek a feladatnak megfelelő y_j-k. Tegyük fel indirekt, hogy vannak olyan $y_j \in A$ pontok, amelyekre $y_{j+1} - y_j > x_{j+1} - x_j$ minden $0 \le j < k$-ra. Ekkor $y_1 > b_1 - a_1$ miatt y_1 nem lehet az első intervallumban, ezért $y_1 \ge a_2$. Ha már tudjuk, hogy valamely j-re $y_j \ge a_{j+1}$, akkor $y_{j+1} - y_j > x_{j+1} - x_j = b_{j+1} - a_{j+1}$ miatt $y_{j+1} \in [a_{j+1}, b_{j+1}]$ nem lehet, ezért $y_{j+1} \ge a_{j+2}$. Tehát indukcióval kapjuk, hogy $y_j \ge b_{j+1}$, és így $y_{k-1} \ge a_k$, és ekkor $y_k - y_{k-1} \le b_k - a_k$ kell, hogy legyen, ami ellentmondás. Tehát ha A mértéke kisebb mint 1 vagy ha mértéke pontosan 1, és véges sok nem elfajuló intervallumból áll, akkor nem jó.

Ha A mértéke nagyobb, mint 1, akkor definiáljuk a következő $\varphi : [0, 1] \to A$ leképezést:

$$\varphi(x) = \max\{y \in A \mid \mu(A \cap [a, y] \le \mu(A)x)\}, \tag{1}$$

ahol $a = \min A$ és μ a Legesgue mérték. Világos, hogy

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \ge \mu(A)(x_1 - x_2),$$

ezért $y_j := \varphi(x_j)$ választassal A-ra teljesül a feltétel.

Végül tegyük fel, hogy $\mu(A) = 1$. Ha A legkisebb pontja (amit a-val jelölünk) izolált, akkor alkalmazzuk az előző bekezdést az $A \cup [a, a + (x_1 - x_0)/2]$ halmazra. Az így kapott y_j pontokra világos, hogy $y_j > a + (x_1 - x_0)/2$ és így $y_j \in A$, ha $j > 0$. Ha szükséges, az y_0-t a-ra cserélve látható, hogy A jó. Hasonlóan belátható, hogy A jó, ha a maximuma izolált pont. Belátjuk, hogy A akkor is jó, ha egy tetszőleges p pontja izolált. Feltehető, hogy $0 < \mu(A \cap [a, p]) < 1$ (ellenkező esetben a p-től jobbra vagy balra levő pontok elhagyhatók), és ez a szám szerepel az x_j-k között (ha nem szerepel vegyük hozzá), legyen mondjuk $x_k = \mu(A \cap [a, p])$. Az $A \cap [a, p]$ halmazt nagyítsuk 1 mértékűre, jelölje ezt $\overline{A}$. A fentiek miatt találhatunk $\overline{A}$-ban olyan $\overline{y}_1 < \ldots < \overline{y}_k$ pontokat, melyekre $\overline{y}_{j+1} - \overline{y}_j > (x_{j+1} - x_j)/x_k$. Alkalmazzunk egy hasonló konstrukciót az $A \cap [p, b]$ halmazra, ahol $b = \max A$. A két halmazt az $\overline{y}_j$ pontokkal együtt az eredeti méretre visszakicsinyítve, a feltételt teljesítő y_j pontokat kaphatunk, tehát A valóban jó.

Most tegyük fel, hogy a tetszőleges jobb oldali környezetében van A-beli és A-n kívüli pont is. Ekkor az előző bekezdéshez hasonlóan tekinthetjük az $A \cup [a, a + (x_1 - x_0)/2]$ halmazt, és megmutathatjuk, hogy A jó. Sőt ebben az esetben azt is elérhetjük, hogy $y_0 > a$ legyen, hiszen A-nak van a-hoz tetszőlegesen közeli pontja. Kiterjesztjük ezt arra az esetre, amikor egy tetszőleges p pont jobb oldali környezetében van A-beli és A-n kívüli pont is. Most is feltehetjük, hogy $0 < \mu(A \cap [a, p]) < 1$ (ha $\mu(A \cap [a, p]) =$

1, akkor a p-től jobbra levő pontokat elhagyva p izolalt maximum, vagy a baloldali környezeteiben is van A-beli, vagy A-n kívüli pont is), és ez a szám szerepel az x_j-k között, legyen mondjuk $x_k = \mu(A \cap [a,p])$. Ekkor először az $A \cap [p,b]$ halmazra (pontosabban egy nagyítottjára) alkalmazva a fentieket, kaphatunk olyan $p < y_k < \ldots < y_n$ pontokat A-ban, amikre $y_{j+1} - y_j > x_{j+1} - x_j$. Végül alkalmazhatjuk az (1) konstrukciót az $A \cap [a, y_k]$ halmazra, és láthatjuk, hogy A jó. Hasonlóan igazolhatjuk azt, hogy A jó abban az esetben is, ha valamely pont bal oldali környezeteiben vannak A-beli és A-n kívüli pontok is.

Végül tekintsük az A komplementerét alkotó intervallumok végpontjait. Ha végtelen sok van, akkor van torlódási pontjuk is, tehát az előző bekezdés alkalmazható. Tehát csak azt az esetet nem vizsgáltuk még, amikor A véges sok intervallum uniója, és ezek egyike se elfajuló. Mivel A mértéke 1, az intervallumok összhossza 1, ezért A nem jó.

Tehát azt kaptuk, hogy A-ra pontosan akkor teljesül a feltétel, ha A nem korlátos, vagy a lezártja nagyobb mint 1 mértékű, vagy 1 mértékű, de nem véges sok nemelfajuló intervallum uniója.

7. feladat (Totik Vilmos). *Mutassuk meg, hogy léteznek n_k, m_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ természetes számok úgy, hogy az $n_k + m_k$, $k = 1, 2, \ldots$ összegek különböző prímszámok, és az $x^{n_k} y^{m_k}$ polinomok lineáris kombinációinak halmaza sűrű $C([0,1] \times [0,1])$-ben a szuprémum normára nézve!*

Megoldás (Harangi Viktor). Legyen K egy kompakt halmaz. Jelölje $C(K)$ a $K \to \mathbf{R}$ folytonos függvények terét a szuprémum norma által indukált topológiával. A megoldás alapja a következő

Tétel (Müntz [3], [1, Theorem 4.2.1]). *Legyen $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ olyan végtelenbe tartó sorozat, melyre*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty.$$

Ekkor az $x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \ldots$ függvények lineáris kombinációi sűrű halmazt alkotnak $C([0,1])$-ben.

Legyen $P_0, P_1, \ldots$ végtelen sok halmaz úgy, hogy a halmazok elemei prímszámok, egy prímszám legfeljebb egy halmazban van, és mindegyik halmazban az elemek reciprokösszege végtelen. Legyen $\lambda_0 = 0$, illetve $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ a P_0 elemeinek felsorolása. Most megadjuk azon monomok A halmazát, melyekről be szeretnénk látni, hogy az általuk feszített lineáris altér sűrű $C([0,1] \times [0,1])$-ben. Egyrészt legyen $x^{\lambda_k} y^0 \in A$ minden $k \geq 0$-ra. Továbbá, legyen még $x^{\lambda_k} y^n \in A$, ha $\lambda_k + n \in P_{k+1}$ $(k \geq 0)$. A definició miatt világos, hogy a 0 kivételével a kitevők összege prím, és hogy mindegyik prím legfeljebb egyszer fordul elő.

A többváltozós Weierstrass tétel miatt elegendő belátni, hogy az $x^l y^m$, $l, m = 0, 1, \ldots$, alakú függvények benne vannak az A által feszített altér lezártjában. Először tekintsük az $x^{\lambda_k} y^m$, függvényeket. Ekkor egyrészt $x^{\lambda_k} y^0 \in A$, másrészt

$$\sum_{n>0:\, x^{\lambda_k} y^n \in A} \frac{1}{n} \geq \sum_{p>\lambda_k:\, p \in P_{k+1}} \frac{1}{p} = \infty,$$

azaz a Müntz tétel miatt $x^{\lambda_k} y^m$ valóban benne van az A által feszített altér lezártjában. Ezután az általános eset hasonlóan következik, ha a Müntz tételt alkalmazzuk az $x^{\lambda_k} y^m$ monomokra, ahol m rögzített. Ezzel a megoldás teljes.

8. feladat (Totik Vilmos és Varjú Péter). *Egy $A = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ sorozatra legyen $SA = \{a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots\}$ az $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ sor részletösszegeinek sorozata. Van-e olyan nem azonosan nulla A sorozat, amelyre az $A, SA, SSA, SSSA, \ldots$ sorozatok mind konvergensek?*

Megmutatjuk, hogy van ilyen sorozat.

I. megoldás (Hablicsek Márton). Legyenek $A = (a_0, \ldots, a_{l-1})$, $B = (b_0, \ldots, b_{m-1})$ *véges* sorozatok és c egy komplex szám. Jelölje

$$SA = (a_0, a_0 + a_1, \ldots, a_0 + \ldots + a_{l-1})$$

az A részletösszegeinek sorozatát,

$$s(A) = a_0 + \ldots + a_{l-1}$$

a sorozat tagjainak az összegét,

$$A.B = (a_0, \ldots, a_{l-1}, b_0, \ldots, b_{m-1})$$

a két sorozat összefűzését, továbbá legyen

$$c + A = (c + a_1, \ldots, c + a_{l-1}), \qquad \text{illetve} \qquad cA = (ca_1, \ldots, ca_{l-1}).$$

Világos, hogy

$$S(cA) = cS(A), \qquad \text{illetve} \qquad S(A \cdot B) = SA \cdot \big(s(A) + SB\big).$$

Minden n pozitív egészre definiáljuk a T_n operációt véges sorozatokon a

$$T_n A = A \cdot \frac{-1}{n} A \cdot \ldots \cdot \frac{-1}{n} A$$

formulával, ahol a jobboldalon a $\frac{-1}{n} A$ sorozat n-szer szerepel. A fenti jelöléseket és észrevételeket használva könnyen látható, hogy $s(T_n A) = 0$ minden n pozitív egészre és A véges sorozatra, továbbá $T_n SA = ST_n A$, ha $s(A) = 0$. Ezt felhasználva, többszörös teljes indukcióval igazolható, hogy tetszőleges A véges sorozatra és $k < n$ pozitív egészekre

$$S^k T_n \ldots T_1 A = S^{k-1} T_n \ldots T_2 S T_1 A = \ldots = T_n \ldots T_{k+1} S T_k S T_{k-1} \ldots S T_1 A.$$

Legyen $A_0 = (1)$, és definiáljuk rekurzivan az $A_n = T_n A_{n-1}$ sorozatot. Világos, hogy ha $n < n'$, akkor A_n egy kezdőszelete az $A_{n'}$ sorozatnak. Tehát létezik pontosan egy olyan $\mathbf{A}$ *végtelen* sorozat, amelynek mindegyik A_n kezdőszelete. Megmutatjuk, hogy $S^k \mathbf{A}$ konvergens minden k-ra. A definiciók miatt $S^k \mathbf{A}$ az a végtelen sorozat, amelynek mindegyik $S^k A_n$ $(k < n)$ kezdőszelete. A fenti észrevétel szerint

$$S^k A_n = S^k T_n \ldots T_1 A_0 = T_n \ldots T_{k+1} S T_k S T_{k-1} \ldots S T_1 A_0.$$

Jelölje M az $ST_k ST_{k-1} \ldots ST_1 A_0$ sorozat maximumát (abszolút értékben). Először vegyük észre, hogy a

$$T_n \ldots T_{k+1} S T_k S T_{k-1} \ldots S T_1 A_0$$

sorozatok tagjai nem nagyobbak mint M. Ezt felhasználva kapjuk, hogy az $S^k \mathbf{A}$ sorozatnak azon tagjai, melyek az $S^k A_n$ kezdőszelet után következnek nem nagyobbak mint $M/(n+1)$, tehát az $S^k \mathbf{A}$ sorozat valóban konvergens.

II. megoldás (Rácz Béla András) Definiáljuk az

$$f(z) = \exp\left(\sqrt{\frac{1}{1-z}}\right), \qquad |z| \le 1$$

holomorf függvényt, a $\sqrt{1/(1-z)}$-nek azzal az ágával, aminek negatív a valós része a $|z| \le 1$ tartományban. Legyen $A = (a_0, a_1, \dots)$ az f Taylor-sorának együttható-sorozata, azaz $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$. Megmutatjuk, hogy $S^k A$ konvergens minden k-ra. Könnyen látható, hogy $S^k A$ az $f(z)/(1-z)^k$ függvény Taylor-sorának együtthatósorozata. Ha megmutatjuk, hogy az $f(z)/(1-z)^k$ függvény $|z| = 1$-re való megszorítása L^1-ben van, akkor a Riemann–Lebesgue-lemma miatt az $S^k A$ sorozat 0-hoz tart.

Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\frac{1}{1-e^{it}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sin t}{2 - 2\cos t}$$

Tehát $\mathrm{Re}\left(1/(1-e^{it})\right) > 0$, és $\left|1/(1-e^{it})\right| > 2c^2/t$ valamilyen $c > 0$ konstanssal $t \in [-\pi, \pi]$-re. Ekkor

$$\mathrm{Re}\left(\sqrt{\frac{1}{1-e^{it}}}\right) < \frac{-c}{\sqrt{t}},$$

és így

$$\left|\frac{f(e^{it})}{(1-e^{it})^k}\right| \le \left(\frac{2}{\pi}\right)^k e^{-c/\sqrt{|t|}} \frac{1}{|t|^k} \le C,$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$|1 - e^{it}| = \left|2\sin(t/2)\right| \ge (2/\pi)2|t/2| = (2/\pi)|t|, \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

9. feladat (Ricardo Restrepo). *Legyen A és B két háromszög a síkon úgy, hogy mindkettő a belsejében tartalmazza az origót, és minden origó középpontú C_r körvonalra $|C_r \cap A| = |C_r \cap B|$ (itt $|\cdot|$ ívmértéket jelent a C_r-en). Igazoljuk, hogy A és B egybevágó. Igaz marad-e az állítás, ha az origó A és B határán van?*

Megoldás (Varjú Péter). Megmutatjuk, hogy a $|C_r \cap A|$ ívhossz egybevágóság erejéig egyértelműen meghatározza a háromszöget, ha az origó a háromszög belsejében van. A későbbiekben szükségünk lesz a következő lemmára.

Lemma. *Ha egy intervallumon valamilyen $a_i, b_j > 0$ számokkal*

$$\sum_{i=1}^{m} \arccos(a_i x) = \sum_{j=1}^{n} \arccos(b_j x) + \text{const},$$

akkor $m = n$, $\{a_1, \dots, a_m\} = \{b_1, \dots, b_m\}$ mint multihalmazok, és a konstans 0.

Bizonyítás. Differenciálással

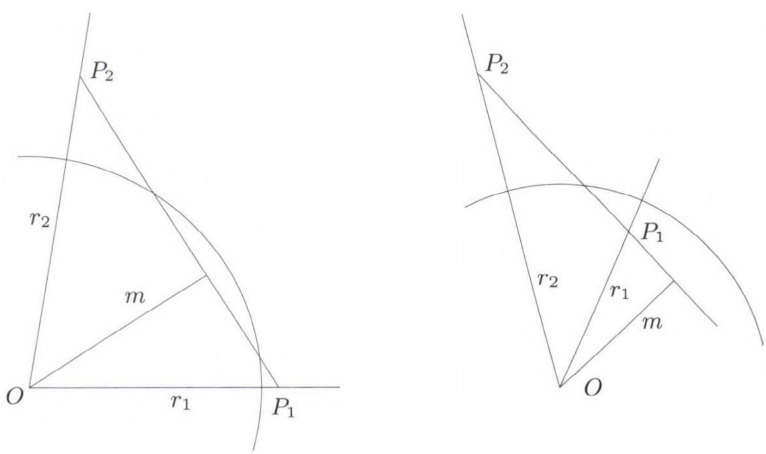
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{-a_i}{\sqrt{1 - a_i^2 x^2}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{-b_j}{\sqrt{1 - b_j^2 x^2}}$$

adódik, és a két oldal analitikussága miatt az egyenlőség kiterjed a 0 egy környezetére is. 0 körüli Taylor sorfejtés és együttható-összehasonlítás adja, hogy ekkor minden k-ra

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{2k+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j^{2k+1}. \tag{2}$$

Ha $\max a_i \neq \max b_j$, akkor itt a két oldal rendje $k \to \infty$ esetén különbözik, ezért $\max a_i = \max b_j$. Hagyjunk el 1–1 legnagyobb tagot (2) mindkét oldalából, majd iteráljuk az eljárást. ■

Legyen P_1 és P_2 két az origótól különböző pont a síkon. Jelölje r_1, illetve r_2 az OP_1, illetve az OP_2 szakaszok hosszát, továbbá φ az iménti két szakasz által bezárt szöget. Az alábbiakban kiszámoljuk a C_r körvonal P_1OP_2 háromszögbe eső részének $g_{r_1,r_2,\varphi}(r)$ hosszát.



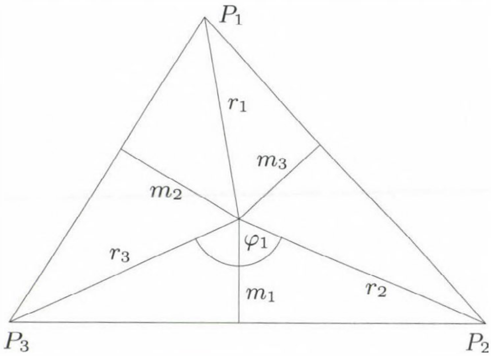
Tegyük fel, hogy $r_1 \leq r_2$, és jelöljük m-mel a P_1P_2 egyenes origótól vett távolságát. Megjegyezzük, hogy r_1 és r_2 ismeretében m, illetve φ kölcsönösen kifejezhető egymással. Két esetet vizsgálunk aszerint, hogy az OP_1P_2 szög hegyes, vagy tompa. Az első esetben

$$g_{r_1,r_2,\varphi}(r) = \begin{cases} r\varphi & \text{ha } r < m, \\ r\left[\varphi - 2\arccos\dfrac{m}{r}\right] & \text{ha } m \leq r < r_1, \\ r\left[\varphi - \arccos\dfrac{m}{r_1} - \arccos\dfrac{m}{r}\right] & \text{ha } r_1 \leq r < r_2, \\ 0 & \text{ha } r_2 \leq r, \end{cases}$$

míg a másodikban

$$g_{r_1,r_2,\varphi}(r) = \begin{cases} r\varphi & \text{ha } r < r_1, \\ r\left[\varphi + \arccos\dfrac{m}{r_1} - \arccos\dfrac{m}{r}\right] & \text{ha } r_1 \leq r < r_2, \\ 0 & \text{ha } r_2 \leq r. \end{cases}$$

A továbbiakban alkalmazzuk a következő ábra jelöléseit, és legyen $h(r) = |A \cap C_r|$.



Világos, hogy

$$h(r) = g_{r_1,r_2,\varphi_3}(r) + g_{r_2,r_3,\varphi_1}(r) + g_{r_3,r_1,\varphi_2}(r),$$

azaz, ha mindegyik OP_iP_j szög hegyes, akkor

$$\begin{aligned} h(r) = r\Big[c(r) &- \chi_{[m_1,r_2)} \arccos(m_1/r) - \chi_{[m_1,r_3)} \arccos(m_1/r) \\ &- \chi_{[m_2,r_1)} \arccos(m_2/r) - \chi_{[m_2,r_3)} \arccos(m_2/r) \\ &- \chi_{[m_3,r_1)} \arccos(m_3/r) - \chi_{[m_3,r_2)} \arccos(m_3/r)\Big], \end{aligned}$$

vagy ha például OP_1P_3 tompa, akkor

$$\begin{aligned} h(r) = r\Big[c(r) &- \chi_{[m_1,r_2)} \arccos(m_1/r) - \chi_{[m_1,r_3)} \arccos(m_1/r) \\ &- \chi_{[r_1,r_3)} \arccos(m_2/r) \\ &- \chi_{[m_3,r_1)} \arccos(m_3/r) - \chi_{[m_3,r_2)} \arccos(m_3/r)\Big], \end{aligned}$$

ahol $c(r)$ szakaszonként konstans. Vizsgáljuk meg az iménti előállításban szereplő intervallumok lehetséges elhelyezkedését, ha $m_1 = m_2 \neq m_3$. Ha az $OP_1P_3, OP_2P_3, OP_3P_1$ és OP_3P_2 szögek mindegyike hegyes, akkor az $\arccos(m_1/r)$-hez négy intervallum tartozik, és ezek balvégpontja azonos. Tegyük fel, hogy nem ez a helyzet. Mivel az OP_iP_j szögek összege π, egy kivételével mindegyik hegyes. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy OP_2P_3 és OP_3P_2 hegyes. Ekkor OP_3P_1 is hegyes, ellenkező esetben OP_3P_1 és OP_3P_2 π-re egészítené ki egymást. Hasonló okok miatt $r_1 < r_2, r_3$. Tehát van olyan intervallum, amin az $\arccos(m_1/r)$ háromszor is szerepel.

Most már rátérhetünk annak igazolására, hogy a $h(r)$ függvény meghatározza a háromszög paramétereit. Alkalmazzuk a lemmát az $xh(1/x)$ függvényre minden pont egy kis környezetében, és tekintsük azokat az a számokat, amikre az $\arccos(ax)$ függvény szerepel a függvény előállításában valamely intervallumon. Három esetet vizsgálunk aszerint, hogy hány ilyen számot találtunk.

Ha három különböző számot találtunk, akkor mindegyik ilyen $a(=m_1, m_2, m_3)$ számhoz keressük meg azokat a pontokat, amelyek elegendően kicsi baloldali környezetében az $\arccos(ax)$ alacsonyabb multiplicitással szerepel az $xh(1/x)$ függvényben, mint egy jobboldali környezetben. Ezen pontok reciproka adja a megfelelő oldal végpontjainak távolságát az origótól. Tehát ismerjük minden oldal, és a rá illeszkedő csúcsok távolságát az origótól. Ezek az adatok meghatározzák a háromszöget.

Ha két különböző értéket találtunk, akkor a háromszögben két oldal azonos távolságra van az origótól. A fenti megjegyzés szerint ekkor van olyan intervallum, ahol valamelyik a-ra az $\arccos(ax)$ legalább hármas multiplicitással szerepel. Tehát a másik érték (amit b jelöl) az, amelyikhez csak egy oldal tartozik. Keressük meg azokat a pontokat, ahol az $\arccos(bx)$ multiplicitása változik. Ezekből meghatározhatjuk egy oldal és a rá illeszkedő csúcsok távolságát az origótól. (Azt is megállapíthatjuk, hogy a megfelelő OP_iP_j szögek közül melyik tompa.) Továbbá ismerjük a másik két oldal távolságát az origótól, és ez elegendő.

Ha csak egyféle a érték szerepel, akkor mindhárom oldal távolsága egyforma. Egyszerűen látható, hogy ilyenkor minden OP_iP_j szög hegyes, tehát elegendő megkeresni azokat a pontokat, amelyek baloldali környezetében kisebb multiplicitással szerepel az $\arccos(ax)$ tag, mint a jobboldaliban. Ezen pontokból meghatározhatjuk a csúcsok távolságát az origótól.

Ezzel beláttuk az állítást. Végül megjegyezzük, hogy az állítás nem marad igaz, ha megengedjük, hogy az origó a háromszögek határán legyen. Tekintsünk például egy nem egyenlőszárú derékszögű háromszöget, amely derékszögű csúcsa az origó. Legyen A, illetve B a háromszögnek az egyik, illetve a másik befogójára vett tükörképével való uniója. Világos, hogy ezekre a háromszögekre nem teljesül az állítás.

10. feladat (Tóth Bálint és Valkó Benedek). *Legyenek $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ azonos eloszlású, valós értékű független valószínűségi változók 0 várható értékkel. Tegyük fel, hogy a $\Lambda(\lambda) := \log \mathbf{E} \exp(\lambda\zeta_i)$ logaritmikus momentumgeneráló függvényük minden $\lambda \in \mathbf{R}$-re létezik ($\mathbf{E}$ a várható értéket jelöli). Legyen továbbá $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ olyan függvény, amelyre $G(x) \leq \min\left(|x|, x^2\right)$. Bizonyítsuk be, hogy akkor elég kis $\gamma > 0$-ra az alábbi sorozat korlátos:*

$$\left\{\mathbf{E}\exp\left(\gamma l G\left(\frac{1}{l}(\zeta_1 + \ldots + \zeta_l)\right)\right)\right\}_{l=1}^{\infty}.$$

Megoldás (Harangi Viktor). Az egyszerűség kedvéért használjuk az $\eta = \zeta_1 + \ldots + \zeta_l$ jelölést. Legyen

$$F(t) = \mathbf{P}\Big(\exp\left(\gamma l G(\eta/l)\right) > t\Big),$$

ahol $\mathbf{P}(A)$ az A esemény valószínűségét jelöli. Jól ismert, hogy ekkor

$$\mathbf{E}\exp\left(\gamma l G(\eta/l)\right) = -\int_0^\infty t\, dF(t) = \int_0^\infty F(t)\, dt,$$

ezért a továbbiakban az F függvényt fogjuk becsülni.

Ennek érdekében először megjegyezzük, hogy ha a logaritmikus momentumgeneráló függvény létezik, akkor az akárhányszor differenciálható, és

$$\Lambda'(0) = \frac{\mathbf{E}\zeta_i \exp(0 \cdot \zeta_i)}{\Lambda(0)} = \mathbf{E}\zeta_i = 0.$$

Ekkor, mivel a második derivált is létezik, $\Lambda(\lambda) < c\lambda^2$ valamely c konstanssal, ha $|\lambda| < 1$. A későbbi jelölések leegyszerűsítése érdekében feltesszük, hogy $c > 1$. Ekkor $\lambda < 1$-re

$$\mathbf{E}\exp\left(\lambda|\eta|\right) \le \mathbf{E}\exp\left(\lambda\eta\right) + \mathbf{E}\exp\left(-\lambda\eta\right) = \exp\left(l\Lambda(\lambda)\right) + \exp\left(l\Lambda(-\lambda)\right) \le 2\exp\left(cl\lambda^2\right),$$

ahol az egyenlőségnél a változók függetlenségét használtuk. Innen és a triviális

$$\mathbf{E}\exp\left(\lambda|\eta|\right) \ge \mathbf{P}\left(|\eta| > s\right)\exp\left(\lambda s\right)$$

becslésből adódik, hogy

$$\mathbf{P}\left(|\eta| > s\right) \le 2\exp\left(cl\lambda^2 - \lambda s\right) \tag{3}$$

minden $\lambda < 1$ számra.

Most rátérünk az $F(t)$ függvény becslésére. Ha $t \le 1$, akkor a triviális $F(t) \le 1$ becslést fogjuk használni, és a továbbiakban feltesszük, hogy $t > 1$. Világos, hogy

$$\exp\left(\gamma l G(\eta/l)\right) > t$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$G(\eta/l) > \frac{\log t}{\gamma l}. \tag{4}$$

Vezessük be az $u = \log t/\gamma l$ jelölést, és vizsgáljuk külön a $0 < u \le 1$ és az $u > 1$ eseteket. Ha $0 < u \le 1$, akkor (4)-ből és $G(x) < x^2$-ből

$$|\eta| > \sqrt{u}l$$

következik. Ekkor (3) az $s = \sqrt{u}l$ és a $\lambda = \sqrt{u}/2c$ helyettesítéssel azt adja, hogy

$$F(t) \le 2\exp\left(\frac{-ul}{4c}\right) = 2\exp\left(\frac{-\log t}{4c\gamma}\right) = t^{-1/4c\gamma},$$

ha $\log t/\gamma l < 1$, azaz ha $t < \exp\left(\gamma l\right)$. Vegyük észre, hogy $c > 1$ és $u \le 1$ miatt $\lambda < 1$, így (3) alkalmazható.

Ha $u > 1$, akkor (4)-ből és $G(x) < |x|$-ből $|\eta| > ul$ következik. Ekkor (3)-at az $s = ul$ és $\lambda = 1/2c$ választással alkalmazva kapjuk, hogy

$$F(t) \le 2\exp\left(\frac{l(1-2u)}{4c}\right) \le 2\exp\left(\frac{-ul}{4c}\right) = t^{-1/4c\gamma},$$

ha $\log t/\gamma l > 1$, azaz ha $t > \exp\left(\gamma l\right)$. Mivel $c > 1$, $\lambda < 1$, így (3) alkalmazható.

Azt kaptuk tehát, hogy ha $\gamma < 1/4c$, akkor F egy l-től független integrálható függvénnyel majorálható. A megoldás elején tett megjegyzések miatt tehát a feladatban megadott sorozat valóban korlátos.

Irodalom

[1] P. Borwein and T. Erdélyi, *Polynomials and polynomial inequalities,* Graduate Texts in Mathematics, **161**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] I. Korec, A class of Lebesgue non–measureable subfields of the field of real numbers, *Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian. Math. Publ.,* **26** (1972), 29–32.

[3] C. Müntz, *Über den Approximationsatz von Weierstrass,* H. A. Schwartz Festschrift, Berlin, 1914.

[4] J. v. Neumann, Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen, *Math. Ann.,* **99** (1928), no. 1, 134–141.

[5] T. Ransford, *Potential theory in the complex plane,* Cambridge University Press, 1995.

[6] M. Souslin, Sur un corps non-dénombrable de nombres réels, *Fundamenta Math.,* **4** (1923), 311–315.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Modok és Társa Nyomda, Kiskunhalas • www.modokestarsa.hu